Cálculo Univariado **Lista numero 31**
integral tarcisio@SobralMatematica.org
T. Praciano-Pereira **Sobral Matemática**

alun@:

31 de maio de 2021	**Cálculo**
Produzido com LaTeX	sis. op. Debian/GNU/Linux
	`www.calculo.sobralmatematica.org/`

Os itens, em cada questão, estão numerados usando os cinco primeiros números primos, 2,3,5,7,11. Ao final de cada questão, ao lado da etiqueta **gabarito:** você encontra o produto dos números primos que correspondem às opções verdadeiras. Entretanto é possível que *gabarito* esteja omitido para que apareça apenas quando for publicada a correção da lista. Os itens podem ser todos verdadeiros ou apenas alguns verdadeiros. Mas havendo algum falso, haverá também o correspondente verdadeiro.

Exercícios 1 *integral*
objetivo: *a integral e sua interpretação*
palavras chave: integração, primitiva, condição inicial.

1.

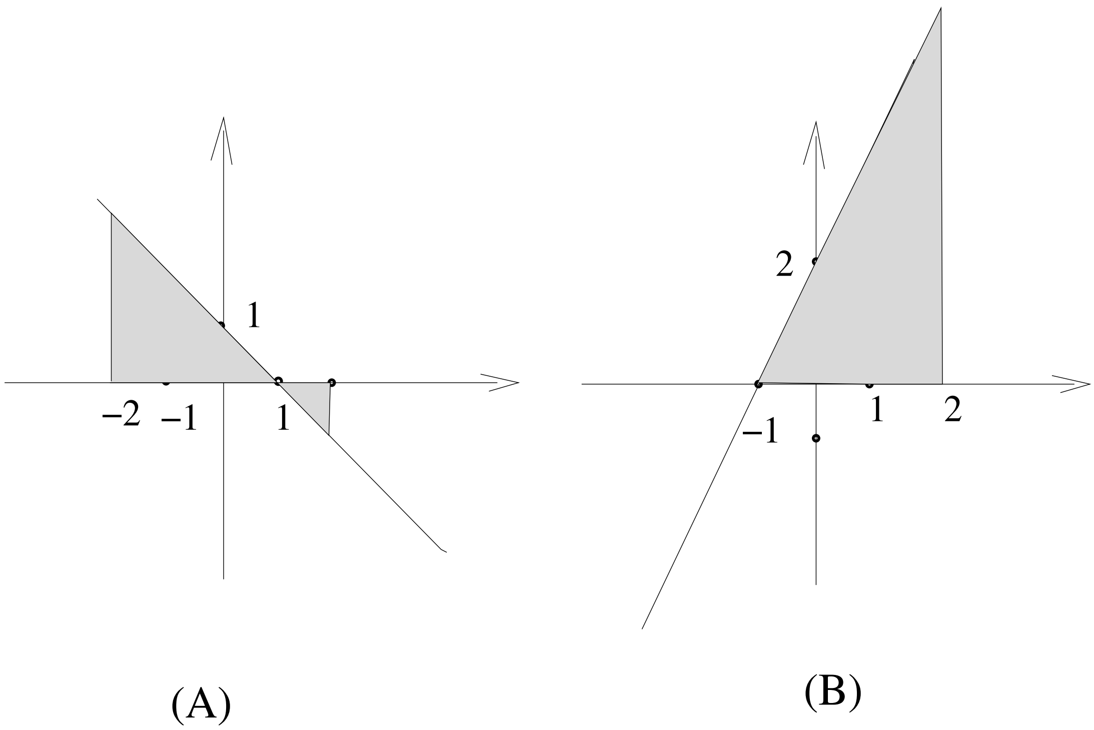

Figura 1: funções e integral

Interpretação geométrica da integral

(2) *(V)[ ](F)[ ] Na figura (1) página 1, o gráfico* **(A)** *representa a integral* $\int_0^2 x dx$.

(3) *(V)[ ](F)[ ] Na figura (1) página 1, o gráfico* **(A)** *representa a integral* $\int_{-2}^2 (x+1)dx$ *e o valor desta integral é 10.*

(5) <u>(V)[ ](F)[ ]</u> *Na figura (1) página 1, o gráfico* **(A)** *representa a integral* $\int\limits_{-2}^{2}(-x+1)dx$ *e o valor desta integral é 4.*

(7) <u>(V)[ ](F)[ ]</u> *Na figura (1) página 1, o gráfico* **(B)** *representa a integral* $\int\limits_{-2}^{2}(2x+2)dx$ *e o valor desta integral é 8.*

(11) <u>(V)[ ](F)[ ]</u> *Na figura (1) página 1, o gráfico* **(B)** *representa a integral* $\int\limits_{-1}^{2}(2x+2)dx$ *e o valor desta integral é 9.*

<u>*gabarito:*</u>

2. <u>*Propriedades da integral*</u> *Identifique os cálculos corretos.*

(2) <u>(V)[ ](F)[ ]</u> *Se* $f(x) = (x+5)(x-3)$ *então* $\int\limits_{-5}^{3} f = 0$

(3) <u>(V)[ ](F)[ ]</u> *Se* $f(x) = (x+5)(x-3)$ *então* $\int\limits_{-5}^{3} f < 0$

(5) <u>(V)[ ](F)[ ]</u> *Se* $f(x) = (x+5)(x-3)$ *então* $\int\limits_{3}^{-5} f > 0$

(7) <u>(V)[ ](F)[ ]</u> *Se* $f(x) = (x+5)(x-3)$ *então* $\int\limits_{3}^{5} f < 0$

(11) <u>(V)[ ](F)[ ]</u> *Se* $f(x) = (x+5)(x-3)$ *então* $\int\limits_{3}^{5} f > 0$

<u>*gabarito*</u>

3. <u>*O cálculo de algumas integrais*</u> *Identifique os cálculos corretos.*

(2) <u>(V)[ ](F)[ ]</u> *Se* $f(x) = x$ *então* $\int\limits_{5}^{-3} f(x)dx = \frac{f(-3)+f(5)}{2}(5-(-3)) > 0$

(3) <u>(V)[ ](F)[ ]</u> *Se* $f(x) = x$ *então* $\int\limits_{5}^{-3} f(x)dx = \frac{f(-3)+f(5)}{2}(-3-5) < 0$

(5) <u>(V)[ ](F)[ ]</u> *Se* $g(x) = -x$ *então* $\int\limits_{-3}^{5} g(x)dx = \frac{g(-3)+g(5)}{2}(5-(-3)) < 0$

(7) <u>(V)[ ](F)[ ]</u> *Se* $f(x) = x$ *então* $\int\limits_{a}^{b} f(x)dx = \frac{f(b)+f(a)}{2}(b-a) > 0$

(11) <u>(V)[ ](F)[ ]</u> *Se* $f(x) = x$ *então* $\int\limits_{a}^{b} f(x)dx = \frac{f(b)+f(a)}{2}(b-a)$ *mas o sinal depende dos valores de* a *e de* b.

<u>*gabarito:*</u>

4. <u>*O cálculo de algumas integrais*</u> *Identifique os cálculos corretos.*

(*2*) *(V)[ ](F)[ ]* $\int_0^{10} -x dx = -50$

(*3*) *(V)[ ](F)[ ] Se* $f(x) = x$ *então* $\int_0^a f(x)dx = F(a) = \frac{a^2}{2}$

(*5*) *(V)[ ](F)[ ] Se* $f(x) = x + 3$ *então* $\int_0^a f(x)dx = \int_0^a x dx + \int_0^a 3dx$ *é a soma das áreas dum triângulo e dum retângulo.*

(*7*) *(V)[ ](F)[ ] Se* $f(x) = x + 3$ *então* $\int_{-3}^{5} f(t)dt = \frac{f(-3)+f(5)}{2}(5 - (-3))$ *usando a fórmula da área de trapézios.*

(*11*) *(V)[ ](F)[ ] Se* $f(x) = x + 3$ *então* $\int_a^b f(s)ds = \frac{f(b)+f(a)}{2}(b - a)$ *é uma aplicação da fórmula da área de trapézios.*

gabarito:

5. *Cálculo da integral*

(*2*) *(V)[ ](F)[ ] Se* $f(x) = mx$ *então* $\int_0^a f(t)dt = \frac{f(a)+f(0)}{2}a = m\frac{a^2}{2}$

(*3*) *(V)[ ](F)[ ] Se* $f(x) = 3x$ *então*

$$\int_{-3}^{3} f(x)dx = \int_{-3}^{0} f(s)ds + \int_{0}^{3} f(t)dt = \frac{f(3) + f(-3)}{2}(3 - (-3)) = 0$$

(*5*) *(V)[ ](F)[ ] Se* $f(x) = 3$ *então* $\int_a^b f(x)dx = f(a)a = 0$ *para qualquer valor de a*

(*7*) *(V)[ ](F)[ ] Se* $f(x) = 3$ *então* $\int_a^b f(x)dx = \frac{f(a)+f(b)}{2}(b - a)$

(*11*) *(V)[ ](F)[ ] Se* $f(x) = m$ *então* $\int_0^t f(x)dx = \int_0^t mdx = mt$

gabarito:

6. *integral, velocidade, distância*

(*2*) *(V)[ ](F)[ ] Se o movimento for* uniformemente acelerado *então a equação da velocidade é* $v(t) = mt + v_0$ *e a distância percorrida entre dois instantes* t_0 *e* t_1 *será*

$$\int_{t_0}^{t_1} v(t)dt = \frac{v(t_0) + v(t_1)}{2}(t_1 - t_0) = m\frac{t_0 + t_1}{2}(t_1 - t_0); \tag{1}$$

é a área dum paralelogramo.

(3) (V)[ ](F)[ ] *“*distância*” é a medida da* quantidade de velocidade *entre dois instantes dados. Se a velocidade for constante igual a m então a distância s percorrida pelo móvel entre os instantes t_0 e t_1 é*

$$s = \int_{t_0}^{t_1} v(t)dt = m(t_1 - t_0) \tag{2}$$

(5) (V)[ ](F)[ ] *Se o movimento for* uniformemente acelerado *então a equação da velocidade é $v(t) = mt + v_0$ e a distância percorrida entre dois instantes t_0 e t_1 será*

$$\int_{t_0}^{t_1} v(t)dt = \frac{v(t_0) + v(t_1)}{2}(t_1 - t_0) = m\frac{t_0 + t_1}{2}(t_1 - t_0) + v_0(t_1 - t_0) \tag{3}$$

é a soma das áreas de um paralelogramo com um retângulo (triângulos são paralelogramos).

movimento é uniformemente acelerado quando a aceleração é constante, o movimento da Terra em volta do Sol não é uniformemente.

(7) (V)[ ](F)[ ] *No caso dum corpo em queda livre (sem considerar a resistência do ar) considerando $t_0 = 0$ a distância percorrida até o instante t será*

$$\int_{t_0}^{t} gsds = g\int_{0}^{t} sds = \frac{gt^2}{2} \tag{4}$$

(11) (V)[ ](F)[ ] *Se houver uma velocidade inicial, no caso do corpo em queda livre, então a velocidade será $v(t) = v_0 + gt$ em que g é a* constante média da gravidade*, e a distância percorrida será*

$$s = \int_0^t v(t)dt = \int_0^t (v_0 + gt)dt = \int_0^t v_0 dt + \int_0^t gtdt \tag{5}$$

$$s = v_0 t + \tfrac{1}{2}gt^2 \tag{6}$$

gabarito:

7. *Representação geométrica da integral*

   Considere os gráficos na figura (fig. 2), página 5,

   (2) (V)[ ](F)[ ] *No gráfico (b) f é uma função do primeiro grau e se $\frac{a+b}{2} = 0$ o gráfico representa uma área nula.*

   (3) (V)[ ](F)[ ] *O gráfico (a) representa a integral duma parábola, $\int_b^a f(t)dt$, em que f é uma função do segundo grau, e é formado de duas áreas algébricas negativas e uma área algébrica positiva, porque $a < b$.*

   (5) (V)[ ](F)[ ] *$f(x) = 4$, a integral $\int_a^b f(x)dx$ no gráfico (d) representa uma área positiva e a integral $\int_b^a f$ representa uma área negativa, porque $a < b$ e $f(x) = m > 0$.*

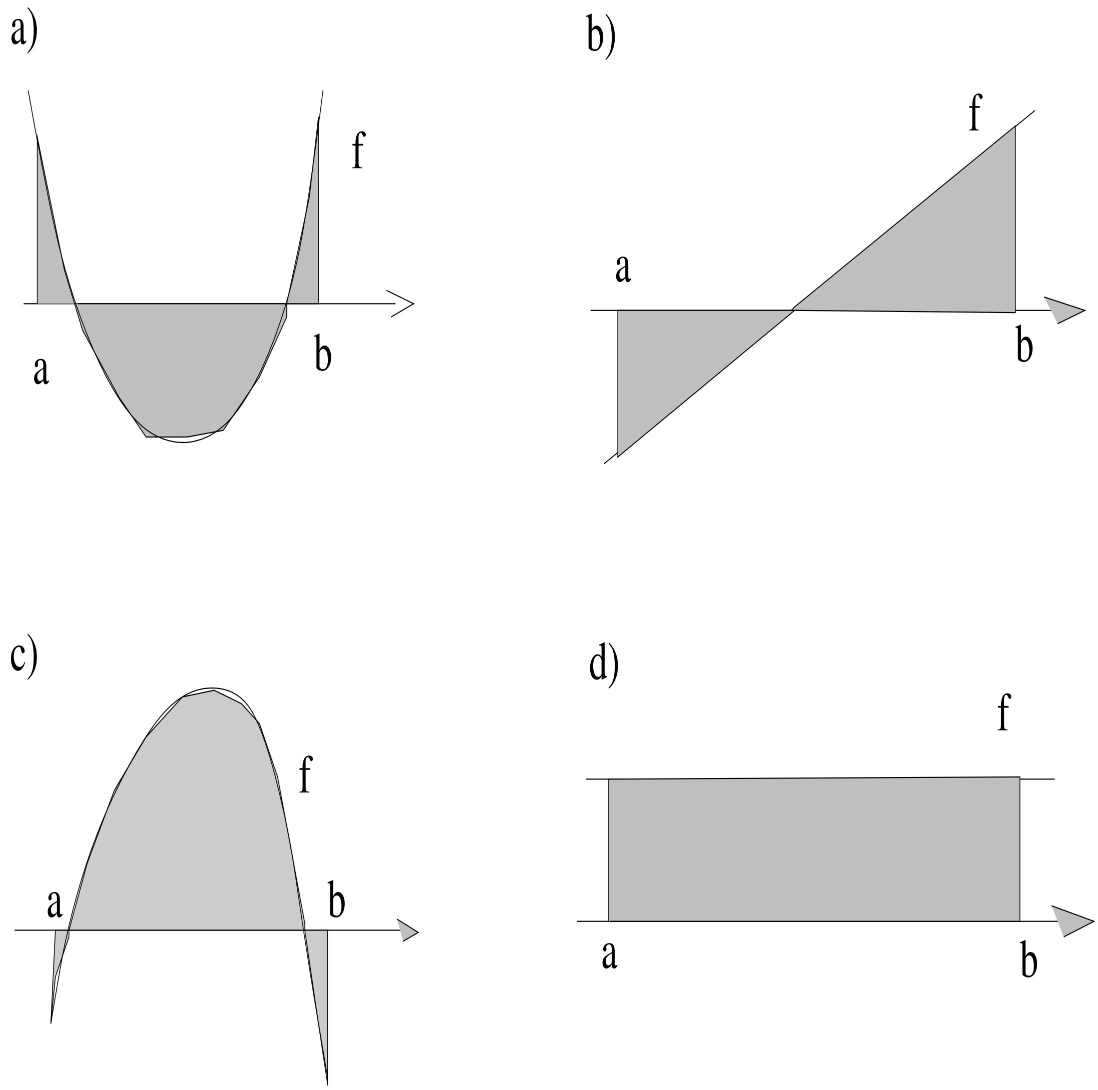

Figura 2: gráficos de integral

(7) *(V)[ ](F)[ ] A integral* $\int_a^b f$ *no gráfico (c) é a soma duas área algébricas negativas e uma área algébrica positiva, porque* $a < b$.

(11) *(V)[ ](F)[ ] O gráfico (b) representa a área de dois triângulos e pode ser calculado usando a regra do trapézio*

$$\int_a^b f(t)dt = (b-a)\frac{f(a)+f(b)}{2};$$

gabarito:

8. *integral e desigualdade*

Considere a função $f(x) = \frac{1}{x}$ *definida em qualquer intervalo que não contenha o zero.*

(2) *(V)[ ](F)[ ] Se* $0 < a < x < b$ *então*

$$\frac{1}{b} < f(x) < \frac{1}{a}; \tag{7}$$

(*3*) *(V)[ ](F)[ ]* *Se* $0 < a < x < b$ *então*

$$\frac{1}{a} < f(x) < \frac{1}{b} \tag{8}$$

(*5*) *(V)[ ](F)[ ]* *Se* $0 < a < b$ *então* $\frac{b-a}{b}, \frac{b-a}{a}$ *são áreas e*

$$\frac{b-a}{b} < \int_a^b f(x)dx < \frac{b-a}{a} \tag{9}$$

(*7*) *(V)[ ](F)[ ]* *Se* m, M *forem ínfimo e supremo de* f *em* $[a, b]$, *respectivamente, então* $m(b-a), M(b-a)$ *são as áreas* "algébricas" *de dois retângulos e vale a desigualdade*

$$m(b-a) < \int_a^b f(x)dx < M(b-a) \tag{10}$$

(*11*) *(V)[ ](F)[ ]* *Se* m, M *forem ínfimo e supremo de* f *em* $[a, b]$ *respectivamente, então* $m(b-a), M(b-a)$ *são as áreas* "algébricas" *de dois retângulos e vale a desigualdade e se a integral de* f *existir neste intervalo, então vale a desigualdade*

$$m(b-a) < \int_a^b f(x)dx < M(b-a) \tag{11}$$

gabarito:

9. *Cálculo aproximado da integral* *Se o gráfico de* f *for um segmento de reta não paralelo ao eixo* OY *então* $\int_a^b f(x)dx$ *pode ser calculada usando o método da área do trapézio. Não sendo este caso posso calcular esta integral, aproximadamente, se ela existir, usando* somas de Riemann *que são* somas das áreas de retângulos *aproximando a integral:*

$$\Delta x = \tfrac{b-a}{N};\ \textit{precisão } N \textit{ número de divisões de } [a, b]; \tag{12}$$

$$S_N = \sum_{k=0}^{N} f(a + k\Delta x)\Delta x; \tag{13}$$

$$S_N = \Delta x \sum_{k=0}^{N} f(a + k\Delta x); \tag{14}$$

em que na última equação, (eq.14) usei a propriedade distributiva da multiplicação relativamente à adição para otimizar a expressão. Estas somas de Riemann se chamam uniformes e formam uma sequência convergindo para o valor

$$\int_a^b f(x)dx \tag{15}$$

se a integral existir. Este cálculo pode ser feito manualmente ou com auxílio duma calculadora ou melhor, *com um programa de computador. Tanto maior for escolhido* N *melhor aproximação se vai obter. Se* f *for um polinômio, o resultado final cai num dos* limites notáveis. *Confira a representação geométrica duma* soma de Riemann *na figura (fig 3), página 7. Na figura a base dos retângulos é variável,* $\Delta x_k = x_{k+1} - x_k$ *mas nos exercícios a soma de Riemann é uniforme com* $\Delta x = \frac{b-a}{N}$ *o que torna os cálculos mais simples. Isto nem sempre é possível mas nesta lista é possível.*

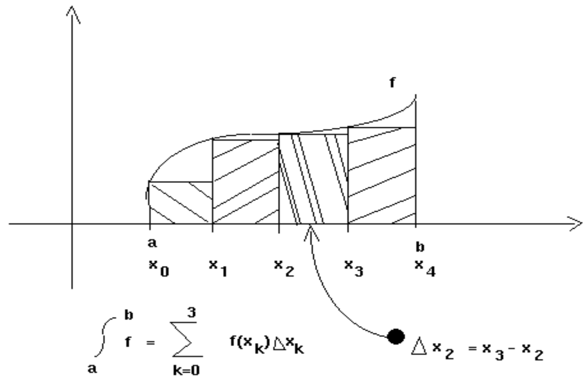

Figura 3: Soma de Riemann

(*2*) <u>*(V)[ ](F)[ ]*</u> *Calculando* $\int_0^a f(x)dx$

$$\int_a^b f(x)dx = \int_0^b f(x)dx - \int_0^a f(x)dx; \tag{16}$$

que mostra que basta saber calcular $\int_0^x f(x)dx$ *para* $x \in Dom(f)$*.*

(*3*) <u>*(V)[ ](F)[ ]*</u>

$$f(x) = x^2; I = \int_0^a f(x)dx; \Delta x = \frac{a}{N}; \tag{17}$$

$$I = \int_0^a f(x)dx \approx \Delta x \sum_{k=0}^{N-1} (k\Delta x)^2 = \Delta x^3 \sum_{k=0}^{N-1} k^2; \tag{18}$$

$$I =\approx \frac{a^3}{N^3} \sum_{k=0}^{N-1} k^2; \tag{19}$$

(*5*) <u>*(V)[ ](F)[ ]*</u>

$$f(x) = x^2; I = \int_0^a f(x)dx; \Delta x = \frac{a}{N}; \tag{20}$$

$$I = \int_0^a f(x)dx \approx \Delta x \sum_{k=0}^{N-1} (k\Delta x)^2 = \Delta x^3 \sum_{k=0}^{N-1} k^2; \tag{21}$$

$$I =\approx a^3 N^3 \sum_{k=0}^{N-1} k^2; \tag{22}$$

(*7*) <u>*(V)[ ](F)[ ]*</u> *A fórmula da soma dos quadrados dos termos duma progressão aritmética é um polinômio* P *do segundo grau e o esquema seguinte verifica se a fórmula é* *verdadeira.*

$$\sum_{k=0}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} = P(n) \qquad P(0) = 0 = \frac{0*1*1)}{6} = 0; \tag{23}$$

$$P(1) = 1 = \frac{1*2*3}{6} = 1; \tag{24}$$

$$P(2) = 1 + 4 = 5 = \frac{2*3*5}{6}; \tag{25}$$

$$P(3) = 1 + 4 + 9 = 14 = \frac{3*4*7}{6}; \tag{26}$$

$$\sum_{k=0}^{n} k^2 = \frac{2n^3+3n^2+n}{6}; \tag{27}$$

porque P é um polinômio do terceiro grau então quatro pontos determinados sobre o seu gráfico o determinam.

(11) *(V)[ ](F)[ ]*

$$f(x) = x^2; \Delta x = \frac{b-a}{N} \tag{28}$$

$$\int_0^a f(x)dx \approx a^3 N^3 \sum_{k=0}^{N-1} k^2 = \frac{a^3(2N^3+3N^2+N)}{6N^3}; \tag{29}$$

$$\int_0^a f(x)dx = \lim_{N=\infty} \frac{2a^3N^3}{6N^3} = \frac{a^3}{3}; \tag{30}$$

gabarito:

10. *cálculo aproximado da integral* *O objetivo é o cálculo aproximado integral de $f(x) = x^3$ usando* somas de Riemann. *O desenvolvimento final depende da soma das potências primeiras, segundas e terceiras dos N primeiros termos duma progressão aritmética e de alguns* limites notáveis. *Mas este teorema simplifica o resultado final*

$$\int_a^b f(x)dx = \int_0^b f(x)dx - \int_0^a f(x)dx; \tag{31}$$

e a sequência de itens vai mostrar isto.

(2) *(V)[ ](F)[ ]*

$$f(x) = x^3; \Delta x = \frac{a}{N}; \tag{32}$$

$$I = \int_0^a f(x)dx \approx \sum_{k=0}^{N-1} f(k\Delta x)\Delta x; \tag{33}$$

$$I \approx \Delta x \sum_{k=0}^{N-1} (k\Delta x)^3 = \Delta x^4 \sum_{k=0}^{N-1} k^3 = \Delta x^4 P(N) = \frac{a^4}{N^4} P(N); \tag{34}$$

em que P é um polinômio do quarto grau.

(3) *(V)[ ](F)[ ] Se P for um polinômio do quarto grau, cinco pontos determinados sobre o seu gráfico o determinam então, conhecida a expressão de P, basta testar cinco valores para verificar se a expressão está correta.*

(5) (V)[ ](F)[ ] *Admita que seja verdade, um teorema, que a soma dos cubos dos termos da progressão aritmética dos N primeiros números naturais é dada pelo polinômio do quarto grau*

$$P(x) = \frac{x^4 + 2x^3 + x^2}{4}; \sum_{k=0}^{N-1} k^3 = P(N); \tag{35}$$

Verifique se a sucessão de equações seguinte conduz ao cálculo da integral $\int\limits_0^a x^3 dx$.

$$f(x) = x^3; \Delta x = \tfrac{a}{N}; \tag{36}$$

$$I = \int\limits_0^a f(x)dx \approx \sum_{k=0}^{N-1} f(k\Delta x)\Delta x = \Delta x \sum_{k=0}^{N-1} (k\Delta x)^3; \tag{37}$$

$$I \approx \Delta x^4 \sum_{k=0}^{N-1} k^3; \tag{38}$$

$$I \approx \tfrac{a^4}{N^4} P(N) = \tfrac{a^4}{N^4} \tfrac{N^4+2N^3+N^2}{4}; \tag{39}$$

$$I = \lim_{N=\infty} \tfrac{a^4}{N^4} \tfrac{N^4+2N^3+N^2}{4} = \tfrac{a^4}{4} = \int\limits_0^a x^3 dx; \tag{40}$$

(7) (V)[ ](F)[ ] *Se P for um polinômio do grau N então $Q(x) = P(x+1) - P(x)$ é um polinômio do grau $N+1$.*

(11) (V)[ ](F)[ ] *Se P for um polinômio do grau N então $Q(x) = P(x+1) - P(x)$ é um polinômio do grau $N-1$.*

gabarito:

11. *cálculo aproximado da integral*

Se uma função f for integrável então o símbolo

$$\int f(x)dx \tag{41}$$

representa uma primitiva de f. Se f for bivariada então

$$\int f(x,y)dx \tag{42}$$

representa uma primitiva de f considerando y um parâmetro que pode ser fixo ou não. Selecione as afirmações verdadeiras.

(2) (V)[ ](F)[ ] *A função*

$$y \mapsto f(y) = \int x^2 + 3xy + y^2 dx \tag{43}$$

é uma função constante cuja gráfico é uma reta.

(3) (V)[ ](F)[ ] *Considere a função*

$$f(y) = \int x^2 + 3xy + y^2 dx; \tag{44}$$

então

$$f'(y) = \int x^2 + 3x + 2y dx; \tag{45}$$

$$f''(y) = \int x^2 + 3x + 2dx; \tag{46}$$

(5) *(V)[ ](F)[ ] Considere a função*

$$f(y) = \int x^2 + 3xy + y^2 dx; \tag{47}$$

f tem por gráfico uma família de parábolas indexadas no parâmetro x.

(7) *(V)[ ](F)[ ] Considere a função*

$$f(y) = \int x^2 + 3xy + y^2 dx; \tag{48}$$

A família de curvas que a equação (eq. 48) representa é também descrita pela equação

$$f(y) = \frac{x^3}{3} + \frac{3x^2y}{2} + xy^2 + C \tag{49}$$

(11) *(V)[ ](F)[ ] Considere a função*

$$f(y) = \int x^2 + 3xy + y^2 dx; \tag{50}$$

A família de curvas que a equação (eq. 50) representa é também descrita pela equação

$$f(y) = x^2y + \frac{3xy^2}{2} + \frac{xy^3}{3} + C \tag{51}$$

—————————————————

12. Soma de potências *O cálculo das integrais das funções polinomiais se obtém* exatamente *como um limite de* somas potências dos termos duma progressão aritmética. *Este exercício tem este objetivo e tem dois aspectos, primeiro,* testar se uma expressão é a verdadeira*, segundo,* descobrir a expressão verdadeira.

(2) *(V)[ ](F)[ ] Se P for um polinômio do grau n então $Q(x) = P(x+1) - P(x)$ é um polinômio do grau $n+1$.*

(3) *(V)[ ](F)[ ] Se P for um polinômio do grau n então $Q(x) = P(x+1) - P(x)$ é um polinômio do grau $n-1$.*

(5) *(V)[ ](F)[ ] Considere a* p.a. *dos números naturais menores do que N, com termo geral k, e $Q(x)$ um polinômio do grau n então existe um polinômio P de grau $n+1$ tal que*

$$\sum_{k=0}^{N-1} Q(k) = P(N) - P(0) \tag{52}$$

(7) *(V)[ ](F)[ ] Suponha que o polinômio P, do sexto grau, que calcule a soma das quinta potências dos números até $N-1$ tenha como coeficiente do termo líder $\frac{1}{6}$. Quer dizer*

$$P(x) = \frac{x^6}{6} + a_5 x^5 + \cdots + a_1 x; \sum_{k=0}^{N-1} k^5 = P(N); \tag{53}$$

Então

$$\int_0 a x^5 dx \approx \sum_{k=0}^{N-1} (k\Delta x)^5 \Delta x = \tag{54}$$

$$= \Delta x^6 \sum_{k=0}^{N-1} k^5 = \Delta x^6 P(N) = \tfrac{a^6}{N^6} P(N); \tag{55}$$

$$\int_0 a x^5 dx \approx \tfrac{a^6}{N^6}\left(\tfrac{N^6}{6} + a_5 N^5 + \cdots + a_1 N\right) = \tag{56}$$

$$= \frac{a^6 + \frac{a_5}{N} + \cdots + \frac{a_1}{N^5}}{6}; \tag{57}$$

$$\int_0 a x^5 dx = \lim_{N=\infty} \frac{a^6 + \frac{a_5}{N} + \cdots + \frac{a_1}{N^5}}{6} = \tfrac{a^6}{6}; \tag{58}$$

Interessa apenas o termo líder do polinômio P para determinar a fórmula do cálculo da integral $\int_0^a x^6 dx$.

(11) *(V)[ ](F)[ ]Suponha que o polinômio P, do grau 7, que calcule a soma das sexta potências dos números até $N-1$ tenha como coeficiente do termo líder $\frac{1}{7}$. Quer dizer*

$$P(x) = \frac{x^7}{7} + a_6 x^6 + \cdots + a_1 x; \sum_{k=0}^{N-1} k^6 = P(N); \tag{59}$$

Então

$$\int_0 a x^6 dx \approx \sum_{k=0}^{N-1} (k\Delta x)^6 \Delta x = \tag{60}$$

$$= \Delta x^7 \sum_{k=0}^{N-1} k^6 = \Delta x^7 P(N) = \tfrac{a^7}{N^7} P(N); \tag{61}$$

$$\int_0 a x^6 dx \approx \tfrac{a^7}{N^7}\left(\tfrac{N^7}{7} + a_6 N^6 + \cdots + a_1 N\right) = \tag{62}$$

$$= \frac{a^7 + \frac{a_6}{N} + \cdots + \frac{a_1}{N^6}}{7}; \tag{63}$$

$$\int_0 a x^5 dx = \lim_{N=\infty} \frac{a^7 + \frac{a_6}{N} + \cdots + \frac{a_1}{N^6}}{7} = \tfrac{a^7}{7}; \tag{64}$$

Interessa apenas o termo líder do polinômio P para determinar a fórmula do cálculo da integral $\int_0^a x^7 dx$.

————————————————————

————————————————————

Índice Remissivo

Referências Bibliográficas

[1] Richard Courant. Gauss and the present situation of the exact sciences. In *The Spirit and the uses of the Mathematical Sciences*. McGraw-Hill, 1969.

[2] T Praciano-Pereira. Página de cálculo i. 2013.

[3] Tarcisio Praciano-Pereira. *Cálculo Avançado*. Dep. de Matemática - Universidade Federal do Rio Grande - Rio Grande - RS, 1998.