Cálculo I	**Lista numero 11**
limite e integral	tarcisio.praciano@gmail.com
Márcio Feijão e T Praciano-Pereira	**Curso de Física**
alun@:	
28 de março de 2017	**Univ. Est. Vale do Acaraú**
Produzido com LaTeX	sis. op. Debian/GNU/Linux
	`www.calculo.sobralmatematica.org/`

Se entregar em papel, por favor, prenda esta *folha de rosto* na solução desta lista, preenchendo seu nome. Ela será usada na correção.

Você pode encontrar programas para simular as questões do cálculo na página [5], procure o link `programas`.

Nesta lista você vai aprender a calcular a integral $\int_a^b x^n dx; n = 1, 2, 3$ em que $[a, b]$ é um intervalo da reta.

Exercícios 1 *limite e integral*
objetivo: *integral das funções polinômiais*
palavras chave: sucessões, número real, propriedades do limite.

1. *limite e integral Considere a função*

$$f(x) = \frac{3}{(x-2)^2} \tag{1}$$

(a) *(V)[ ](F)[ ] f está definida para todos os números reais.*
(b) *(V)[ ](F)[ ] f não está definida para $x = 2$.*
(c) *(V)[ ](F)[ ] A sucessão $s_k = 2 + \frac{1}{k}$ converge para $x = 2$.*
(d) *(V)[ ](F)[ ] A sucessão $t_k = \frac{2k+3}{k+4}$ converge para $x = 2$.*
(e) *(V)[ ](F)[ ] Aplicando a função f à sucessão s_k resulta numa nova sucessão $r_k = f(s_k)$ e a sucessão r_k* não tem limite *e também* não é limitada.

2. *limite e integral Considere as funções*

$$f_1(x) = \frac{3}{(x-2)^2}; \tag{2}$$
$$f_2(x) = \frac{x^3 - 6x^2 + 12x - 8}{(x-2)^2}; \tag{3}$$
$$f_3(x) = \frac{x^2-4}{x-2}; \tag{4}$$

(a) *(V)[ ](F)[ ] A função f_3 está definida para qualquer número real.*
(b) *(V)[ ](F)[ ] A função f_1 está definida para qualquer número real.*
(c) *(V)[ ](F)[ ] A função f_2 está definida para qualquer número real.*
(d) *(V)[ ](F)[ ] s é uma sucessão convergindo para $a = 2$,*

$$\lim_{k=\infty} s_k = 2 \tag{5}$$

então

$$\lim_{k=\infty} f_1(s_k) \text{ não existe}; \tag{6}$$
$$\lim_{k=\infty} f_2(s_k) = 0 \tag{7}$$
$$\lim_{k=\infty} f_3(s_k) \text{ não existe}; \tag{8}$$

(e) *(V)[ ](F)[ ] A função f_3 não está definida para $a = 2$ entretanto é possível redefiní-la para $a = 2$ com a equação:*

$$\begin{cases} x \neq 2 \Rightarrow f_3(x) = \frac{x^3-6x^2+12x-8}{(x-2)^2}; \\ x = 2 \Rightarrow f_3(x) = x2 - 4x + 4 \end{cases} \tag{9}$$

Observação *é comum usar-se a notação*

$$\lim_{x=2} f_1(x) \text{ não existe}; \tag{10}$$
$$\lim_{x=2} f_2(x) = 0 \tag{11}$$
$$\lim_{x=2} f_3(x) \text{ não existe}; \tag{12}$$

em lugar da formulação usada nas equações (eq.6)- (eq.8).

3. *limite e integral*

Definição 1 (continuidade) *sequencial*

Se diz que uma função é contínua sequencialmente *quando ela preserva convergência de sucessões, ou ainda, se para uma sucessão qualquer s; $\lim_{k=\infty} s_k = a$ então $\lim_{k=\infty} f(s_k) = f(a)$. Se este último limite não existir, para alguma sucessão, então f não é contínua.*

Observe que as sucessões de números racionais são os números reais, ou em outras palavras, se definem os números reais como as sucessões convergentes de números racionais.

Considere a função f definida por

$$f(x) = \frac{(2x+3)(x-1)}{x-1} = \frac{2x^2+x-3}{x-1}; \tag{13}$$

(a) *(V)[ ](F)[ ] f é uma função continua definida em toda a reta real.*
(b) *(V)[ ](F)[ ] f não está definida no ponto $a = 1$.*
(c) *(V)[ ](F)[ ] f não é contínua no ponto $a = 1$.*
(d) *(V)[ ](F)[ ] f preserva convergência em qualquer ponto da reta.*
(e) *(V)[ ](F)[ ] Podemos redefinir f com a equação*

$$g(x) = \begin{cases} x \neq 1 \Rightarrow f(x) = \frac{(2x+3)(x-1)}{x-1} = \frac{2x^2+x-3}{x-1}; \\ x = 1 \Rightarrow f(1) = 2; \end{cases} \tag{14}$$

e dizer que $f = g$.

Como

(15) $$g(1) = 5 = \lim_{x=1} g(x)$$

Como g preserva convergência em qualquer ponto da reta dizemos que a continuidade de f foi restaurada. Ainda se usa a linguagem "f tem uma descontinuidade removível".

4. *oscilador e limite Suponha que um móvel esteja instalado num trilho eletromagnético dentro duma urna de vidro hermeticamente fechada com vácuo.*

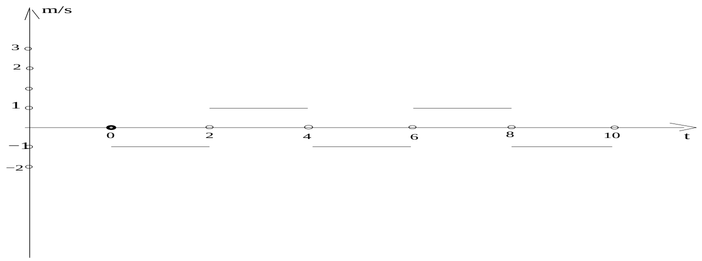


Figura 1: velocidade contra o tempo

Suponha além disto que o móvel seja imantado de modo que quando o trilho for eletrificado o móvel deslize sobre o mesmo sem atrito e que seja possível imprimir-lhe movimento externamente com auxílio duma alavanca devidamente calibrada de modo a imprimir-lhe exatamente a velocidade de $1m/s$, *sempre partindo de um dos extremos do trilho que mede 2m. Em cada extremo do trilho se encontra um material* perfeitamente elástico *de modo que movel ao bater nestes anteparos reverte o sentido da velocidade sem perder energia cinética.*

Ao começar a experiência sempre se inicializa o contador do tempo de modo que o $t_0 = 0$, *a condição inicial.*

Seja $v(t)$ *a função que mede a velocidade do móvel dentro da urna com vácuo em movimento sobre o trilho.*

(a) *(V)[ ](F)[ ]*
A figura (fig 1), página 3, traz o gráfico da velocidade v do móvel.

(b) *(V)[ ](F)[ ] A velocidade v do móvel é uma função descontínua de segunda espécie (a contininuidade não é restaurável).*

(c) *(V)[ ](F)[ ] Suponha que o trilho onde se se movimenta o móvel tenha comprimento 2m entre os batentes. A velocidade v tem um salto a cada 2 minutos.*

(d) *(V)[ ](F)[ ] O salto de descontinuidade da velocidade é de* $2m/s$

(e) *(V)[ ](F)[ ] Em quatro minutos o móvel percorre a distância zero metros.*

5. *função primitiva Considere a figura (fig 2), página 4, contendo gráfico da velocidade contra o tempo dum trem* oscilando *sobre um trilho magnético descrito na questão 4. A área*

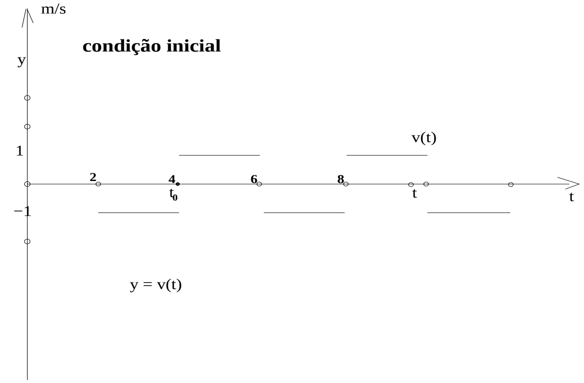


Figura 2: condição inicial

limitada pelo gráfico da velocidade $y = v(t)$ *e o eixo dos tempos é a distância percorrida pelo trem, é uma função do tempo*

(16) $$s(t) = \int_{t_0}^{t} v(x)dx;$$

O símbolo na equação (eq.16) é chamado de integral e representa a área *limitada pelo gráfico da função* $y = v(t)$ *e pelo eixo* Ot *entre dois pontos dados,* t_0, t *em que o primeiro ponto,* t_0, *é chamado de* condição inicial.

(a) *(V)[ ](F)[ ] A área que define* $y = s(t)$ *é formada de áreas de retângulos.*

(b) *(V)[ ](F)[ ] Se* $t_0 = 4$ *como sugere a (fig 2), página 4, então*

(17) $$s(6) = 2m$$

(c) *(V)[ ](F)[ ] Se* $t_0 = 4$ *como sugere a (fig 2), página 4, então*

(18) $$s(8) = 0$$

significando isto que o trem está volta na extremidade inicial do trilho.

(d) *(V)[ ](F)[ ] Se* $t_0 = 4$ *como sugere a (fig 2), página 4, então*

(19) $$s(9) = 1m$$

(e) *(V)[ ](F)[ ] O gráfico da função* $y = s(t)$ *aparece na figura (fig 3), página 5.*
s é uma função contínua.

6. *área, integral, Soma de Riemann Considere a função* $f(x) = x^2$. *O símbolo* $I = \int_0^1 f(x)dx$ *designa a integral desta função relativamente ao intervalo* $[0, 1]$ *e pode ser calculado aproximadamente usando-se somas de Riemann. As somas de Riemann formam sucessões* S_k *que*

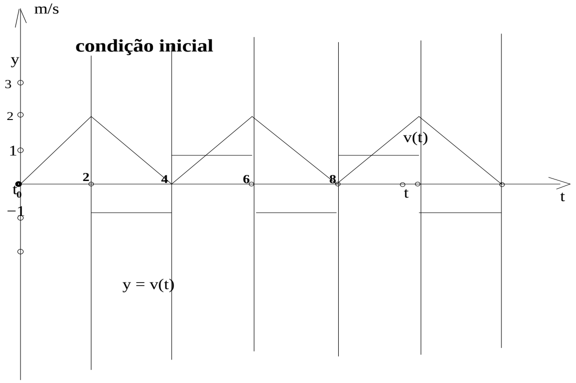


Figura 3: movimento oscilatório

produzem uma aproximação com k retângulos e se $\lim_{k=\infty} S_k$ *existir para as todas as possíveis somas de Riemann então I é um número, a integral existe. Esta lista vai trabalhar com um caso particular de* somas de Riemann, *as* uniformes *quando o intervalo é dividido em parte iguais.* *Notação:*

(20) $$\Delta x = \frac{1}{k} = \frac{1-0}{k};$$

(21) $$S_k = \sum_{i=0}^{k-1} f(i\Delta x)\Delta x;$$

(22) $$I = \lim_{k=\infty} S_k = \int_0^1 f(x)dx;$$

(a) *(V)[ ](F)[ ]*

(23) $$S_{10} = 0 + \Delta x^3 + 4\Delta x^3 + \cdots + 81\Delta x^3 + 100\Delta x^3 = 0.285$$

(b) *(V)[ ](F)[ ]*

(24) $$S_{10} = 0 + \Delta x^3 + 4\Delta x^3 + \cdots + 81\Delta x^3 = 0.285$$

(c) *(V)[ ](F)[ ]*

(25) $$S_k = \sum_{i=0}^{k-1} f(i\Delta x)\Delta x = \Delta x \sum_{i=0}^{k-1} f(i\Delta x) = \Delta x \sum_{i=0}^{k-1} i^2 \Delta x^2;$$

(d) *(V)[ ](F)[ ]*

(26) $$S_k = \Delta x^2 \sum_{i=0}^{k-1} i^2$$

(e) *(V)[ ](F)[ ]*

(27) $$S_k = \frac{\sum_{i=0}^{k-1} i^2}{k^3};$$

7. *soma de potências*

Uma progressão aritmética é uma sucessão cujos termos são definidos por um polinômio do primeiro grau. A soma dos termos p.a. é dada por um polinômio do segundo grau:

(28) $$\sum_{i=1}^{k} i = \sum_{i=1}^{k} P(i) = \frac{k+1}{2}k = Q_2(k);$$

em que Q_2 *é um polinômio do segundo grau.*

Hipótese 1 (Conjectura:) *(somas de potências) Assim posso fazer a* conjectura *"a soma dos quadrados dos termos duma p.a. é dada por dum polinômio do terceiro grau.":*

(29) $$\sum_{i=1}^{k} i^2 = Q_3(k);\ \text{grau de } Q_3 \text{ é } 3;$$

O objetivo desta questão é mostrar como se pode descobrir Q_3 *neste caso em que a p.a. em razão 1. A metodologia não seria diferente*

para uma p.a. de razão qualquer, apenas muda a expressão do último sistema equações sem alterar sua ordem.

Considere um polinômio do terceiro grau

(30) $$Q_3(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3;$$

(a) *(V)[ ](F)[ ] O polinômio* Q_3 *fica completamente determinado por quatro valores dados.*

(b) *(V)[ ](F)[ ] quatro valores assumidos por* Q_3 *são insuficientes para o determinar.*

(c) *(V)[ ](F)[ ] O sistema de equações*

(31) $$\begin{cases} \sum_{i=0}^{1} i^2 = Q_3(1) = 1; \\ \sum_{i=0}^{2} i^2 = Q_3(2) = 5; \\ \sum_{i=0}^{3} i^2 = Q_3(3) = 14; \\ \sum_{i=0}^{4} i^2 = Q_3(4) = 30; \end{cases}$$

permite de calcular os coeficientes a_0, a_1, a_2, a_3 *de* Q_3*.*

(d) <u>(V)[ ](F)[ ]</u> *O sistema de equações que me permite calcular os coeficientes do polinômio $Q_3(x)$ é*

$$\begin{cases} Q_3(1) = a_0 + a_1 + a_2 + a_3 & = 1; \\ Q_3(2) = a_0 + 2a_1 + 4a_2 + 8a_3 & = 5; \\ Q_3(3) = a_0 + 3a_1 + 9a_2 + 27a_3 & = 14; \\ Q_3(5) = a_0 + 4a_1 + 16a_2 + 64a_3 & = 30; \end{cases} \tag{32}$$

$$\begin{cases} a_0 + a_1 + a_2 + a_3 & = 1 \\ a_0 + 2a_1 + 4a_2 + 8a_3 & = 5 \\ a_0 + 3a_1 + 9a_2 + 27a_3 & = 14 \\ a_0 + 4a_1 + 16a_2 + 64a_3 & = 30; \end{cases} \tag{33}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 & 8 \\ 1 & 3 & 9 & 27 \\ 1 & 4 & 16 & 64 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 14 \\ 30 \end{pmatrix}; \tag{34}$$

cuja solução é

$$\left(a_0 = 0; \quad a_1 = \tfrac{1}{6}; \quad a_2 = \tfrac{1}{6}; \quad a_3 = \tfrac{1}{3}; \right) \tag{35}$$

(e) <u>(V)[ ](F)[ ]</u>

$$\sum_{i=0}^{k} i^2 = Q_3(k) = \frac{k + 3k^2 + 2k^3}{6} \tag{36}$$

Como curiosidde , você pode verificar algumas somas:

$$\sum_{i=0}^{k} i^2 = Q_3(k); \tag{37}$$

$$0^2 + 1^2 = Q_3(1); \tag{38}$$

$$0^2 + 1^2 + \cdots + 10^2 = Q_3(10) = 385; \tag{39}$$

$$0^2 + 1^2 + \cdots + 100^2 = Q_3(100) = 338350; \tag{40}$$

$$0^2 + 1^2 + \cdots + 1000^2 = Q_3(1000) = 333833500; \tag{41}$$

$$0^2 + 1^2 + \cdots + 150000^2 = Q_3(150000) = 1125011250025000; \tag{42}$$

$$0^2 + 1^2 + \cdots + 1500000^2 = 1125001125000250000; \tag{43}$$

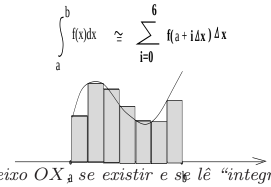
E aqui está um programa escrito em `calc` *que você pode usar para testar a correção das fórmulas que você encontrar:*

```
define SomaPot(n,p) {
        local soma = 0;
        for(i=0; i¡=n; i++) soma += power(i,p);
        return soma;
}
```

`SomaPot(1500000,2)` *num terminal do* `calc` *vai lhe dar o valor da soma dos quadrados até* 1500000 *ou qualquer outro valor que você escolher. Escolha* `n,p`, `SomaPot(n,p)` *e obtenha a soma das potências* `p` *de* `n`.

8. <u>*somas de potências, soma de Riemann*</u>

O símbolo



$$\int_a^b f(x)dx \tag{44}$$

representa a área algébrica limitada pelo gráfico da função f e o eixo OX se existir e se lê "integral de f entre a, b". O objetivo desta questão é conduzir ao cálculo da integral da função do segundo grau. Inicia com o valor aproximado obtido com uma soma de Riemann seguido dum cálculo de limite. A figura (fig 8), página 8, é uma interpretação gráfica da expressão da soma de Riemann em que foi feita uma divisão com 7 retângulos para o cálculo aproximado da integral da função f. Com um programa, por exemplo,

```
define f(x) {
        returnpower(x,2);
}


define SomaRiemann(a,b,k) {
        local soma=0,        i, deltax = 1.0*(b-a)/n;
        for (i=0;            i<k; i++) soma += f(i*deltax);
        return               soma*deltax;
}


print SomaRiemann(0,1,1000);
```

Executando a última linha vai resultar em 0.3328335 *que é valor aproximada da integral $\int_0^1 x^2 dx$ com mil subdivisões do intervalo* $[0, 1]$. *O programa recebe os parâmetros* `a,b,n`*, correspondendo ao início, fim do intervalo e o número n de subintervalos a serem considerados. Troque a equação da função e rode o programa para calcular, aproximadamente, outras integrais. Aumente o valor de n para obter melhor aproximação, mas não exagere porque pode aumentar excessivamente o tempo de processamento.*

Este programa está escrito em `calc`, uma linguagem de programação livremente distribuida na Internet.

- *Com* $k = 10000000$,
- *obtive o resultado* $I = 0.333333283333335$,
- *em aproximadamene* `2m52.211s` *minutos de processamento.*

(a) <u>(V)[ ](F)[ ]</u> *A soma de Riemann*

$$\sum_{i=0}^{9} f(a + i\Delta x)\Delta x; \Delta x = 1/10; \tag{45}$$

calcula com 10 subdivisões aproximadamente.

(b) <u>(V)[ ](F)[ ]</u> *Aplicando a propriedade distributiva o programa pode ser otimizado, e aqui você um interessante desta propriedade da aritmética. A soma de Riemann da equação (eq.45) anterior fica*

$$\Delta x \sum_{i=0}^{9} f(i\Delta x); \Delta x = 1/10; \tag{46}$$

transferindo Δx para fora do somatório. É o método que está sendo usado no programa 9. O programa primeiro calcula todas as alturas e depois multiplica a soma por Δx.

(c) <u>(V)[ ](F)[ ]</u> *Sendo* $f(x) = x^2$ *a soma de Riemann para o cálculo aproximado da integral* $\int_0^1 f(x)dx$ *fica*

$$\Delta x \sum_{i=0}^{9} i^2 \Delta x^2; \Delta x = 1/10; \tag{47}$$

que pode, neste caso ser novamente otimizada *colocando* Δx^2 *em evidência na soma (propriedade distributiva do produto em relação à soma) ficando*

$$\Delta x^3 \sum_{i=0}^{10} i^2; \Delta x = 1/10; \tag{48}$$

(d) <u>(V)[ ](F)[ ]</u> *Como* $\Delta x = \frac{1}{10}$ *a expressão da soma de Riemann na equação (eq.48) pode ser escrita como*

$$\frac{1}{1000}\sum_{i=0}^{9} i^2 = \frac{\sum_{i=0}^{10} i^2}{1000} \tag{49}$$

(e) <u>(V)[ ](F)[ ]</u> *Podemos expressar todos os cálculos da aproximação usando símbolos:*

$$I \approx \int_0^1 x^2 dx; \Delta x = \tfrac{1}{k}; \tag{50}$$

$$I = \Delta x^3 \sum_{i=0}^{k-1} i^2 = \frac{\sum_{i=0}^{k-1} i^2}{k^3}; \tag{51}$$

$$I = \frac{Q_3(k)}{k^3} = \frac{a_0 + a_1k + a_2k^2 + a_3k^3}{k^3}; \tag{52}$$

$$I = \frac{a_0}{k^3} + \frac{a_1k}{k^3} + \frac{a_2k^2}{k^3} + \frac{a_3k^3}{k^3}; \tag{53}$$

$$I = \frac{a_0}{k^3} + \frac{a_1}{k^2} + \frac{a_2}{k} + a_3; \tag{54}$$

Todos os termos na última equação (eq. 54), têm limite nulo, exceto o último que não depende de k *portanto o seu limite é* a_3 *então*

$$\int_0^1 x^2 dx = a_3 = \frac{1}{3} \tag{55}$$

e foi este valor que foi encontrado rodando o programa, aproximadamente.

9. <u>*somas de potências, soma de Riemann*</u>

O objetivo desta questão é conduzir ao cálculo "exato" da integral da função quadrática, $f(x) = x^2$ *sobre qualquer intervalo* $[a, b]$*. Vou construir uma soma de Riemann relativa a um intervalo qualquer transformando em simbólicas as expressões. O programa que aparece na questão 8 já opera* simbolicamente *e pode ser usado para sua compreensão desta questão.*

a exatidão é um mito, assim como a perfeição!

Para calcular a integral

$$\int_a^b x^2 dx \tag{56}$$

vou dividir o intervalo $[a, b]$ *em* k *subintervalos de mesma medida, então* $\Delta x = \frac{b-a}{k}$*. A figura (fig. 8), página 8, representa a subdivisão do intervalo em 7 subintervalos de mesma medida e a sucessão de retângulos tem por altura o valor de* f *no início de cada subintervalo. Isto pode ser alterado, desde que seja feito de forma consistente, então é possível escrever duas expressões para a soma de Riemann:*

$$\sum_{i=0}^{k-1} f(a + i\Delta x)\Delta x; \Delta x = \tfrac{b-a}{k}; \tag{57}$$

$$\sum_{i=1}^{k} f(a + i\Delta x)\Delta x; \Delta x = \tfrac{b-a}{k}; \tag{58}$$

Na primeira, equação (eq.57), as alturas dos retângulos estão sendo calculadas no início de cada subintervalo, e na segunda, equação (eq.58), as alturas dos retângulos estão sendo calculadas no final de cada subintervalo.

E há outras variantes, o que não é tão importante discutir agora. Vou me fixar, daqui para frente na primeira expressão, que aparece na equação (eq.57). Esta é a formulação que dei aos programas. Você pode encontrar programas similares em [5, arquivo.calc]*

Nesta questão há itens falsos, mas então o item verdadeiro, também, estará presente.

(a) <u>(V)[ ](F)[ ]</u> *Uma* soma de Riemann *que calcula um valor aproximado para a integral* $\int_a^b f(x)dx$ *é*

$$I = \sum_{i=0}^{k-1} f(a + i\Delta x)\Delta x; \Delta x = \tfrac{b-a}{k}; \tag{59}$$

$$I = \Delta x \sum_{i=0}^{k-1} f(a + i\Delta x) \tag{60}$$

e expressão na equação (eq.60) foi deduzida usando a propriedade distributiva do produto relativamente à soma.

(b) <u>(V)[ ](F)[ ]</u> *Uma* soma de Riemann *que calcula um valor aproximado para a integral* $\int_a^b f(x)dx$ *é*

$$I = \sum_{i=0}^{k-1} f(a + i\Delta x)\Delta x; \Delta x = \tfrac{b-a}{k}; \tag{61}$$

$$I = \Delta x \sum_{i=0}^{k-1} f(a + i\Delta x) \tag{62}$$

e expressão na equação (eq.62) foi deduzida usando a propriedade associativa da soma.

(c) <u>(V)[ ](F)[ ]</u> *Sendo* $f(x) = x^2$ *então*

$$I = \sum_{i=0}^{k-1} f(a + i\Delta x)\Delta x; \Delta x = \tfrac{b-a}{k}; \tag{63}$$

$$I = \sum_{i=0}^{k-1} (a + i\Delta x)^2 \Delta x; \tag{64}$$

$$I = \sum_{i=0}^{k-1} \left(a^2 + 2ai\Delta x + (i\Delta x)^2\right) \Delta x; \tag{65}$$

$$I = ka^2 + 2a\Delta x \sum_{i=0}^{k-1} i + \Delta x^2 \sum_{i=0}^{k-1} i^2; \tag{66}$$

pela definição de f, pelo uso do produto notável "quadrado da soma" e porque o termo constante a^2 está sendo somado k vezes.

(d) <u>*(V)[ ](F)[ ]*</u> *Sendo $f(x) = x^2$ então*

$$I = \sum_{i=0}^{k-1} f(a + i\Delta x)\Delta x; \Delta x = \frac{b-a}{k}; \tag{67}$$

$$I = \sum_{i=0}^{k-1} (a + i\Delta x)^2 \Delta x; \tag{68}$$

$$I = \sum_{i=0}^{k-1} \left(a^2 + 2ai\Delta x + (i\Delta x)^2\right) \Delta x; \tag{69}$$

$$I = ka^2\Delta x + 2a\Delta x^2 \sum_{i=0}^{k-1} i + \Delta x^3 \sum_{i=0}^{k-1} i^2; \tag{70}$$

$$I = a^2(b-a) + 2a(\tfrac{b-a}{k})^2 \tfrac{(k-1)k}{2} + \Delta x^3 Q_3(k-1); \tag{71}$$

pela definição de f, pelo uso do produto notável "quadrado da soma" e pela propriedade associativa da soma, pela definição de Q_3 na questão 8.

(e) <u>*(V)[ ](F)[ ]*</u> *Sendo $f(x) = x^2$ então*

$$\Delta x = \frac{b-a}{k}; I = \sum_{i=0}^{k-1} f(a + i\Delta x)\Delta x; = \sum_{i=0}^{k-1} (a + i\Delta x)^2 \Delta x; \tag{72}$$

$$I = \sum_{i=0}^{k-1} \left(a^2\Delta x + 2ai\Delta x^2 + i^2\Delta x^3\right); \tag{73}$$

$$I = ka^2\Delta x + 2a\Delta x^2 \sum_{i=0}^{k-1} i + \Delta x^3 \sum_{i=0}^{k-1} i^2; \tag{74}$$

$$I = ka^2 \tfrac{b-a}{k} + 2a(\tfrac{b-a}{k})^2 \tfrac{(k-1)k}{2} + (\tfrac{b-a}{k})^3 Q_3(k-1); \tag{75}$$

$$I = a^2(b-a) + a(b-a)^2 \tfrac{k-1}{k} + (\tfrac{b-a}{k})^3 \tfrac{(k-1)+3(k-1)^2+2(k-1)^3}{6}; \tag{76}$$

$$\begin{cases} \lim\limits_{k=\infty} a^2(b-a) = a^2(b-a); \\ \lim\limits_{k=\infty} a(b-a)^2 \frac{k-1}{k} = a(b-a)^2; \\ \lim\limits_{k=\infty} (\frac{b-a}{k})^3 \frac{(k-1)+3(k-1)^2+2(k-1)^3}{6} = \frac{(b-a)^3}{3}; \end{cases} \tag{77}$$

$$\int_a^b f(x)dx = \tag{78}$$

$$= \tfrac{3a^2(b-a)}{3} + \tfrac{3a(b-a)^2}{3} + \tfrac{b^3-3ab^2+3a^2b-a^3}{3} = \tag{79}$$

$$= \tfrac{3a^2b-3a^3}{3} + \tfrac{3ab^2-6a^2b+3a^3}{3} + \tfrac{b^3-3ab^2+3a^2b-a^3}{3} = \tag{80}$$

$$= \tfrac{b^3-a^3}{3} \tag{81}$$

em que Q_3 é o polinômio que fornece a soma dos quadrados dos número naturais desde zero até $k-1$ definido na questão 7. Na equação (eq.76) tenho que calcular o limite quando k cresce indefinidamente ao longo dos números naturais e isto foi feito na equação (eq.77). Depois somei os limites usando a regra, "limite da soma é a soma dos limites" o que resulta na equação (eq.81)

A expressão na equação (eq.81) precisa ser analisada, ela é a diferença de dois valores duma mesma função: $F(x) = \frac{x^3}{3}$. Repetindo, com outras palavras,

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a); F(x) = \frac{x^3}{3}; \tag{82}$$

Esta expressão vai aparecer em todas as integrais, a equação (eq.82), é o Teorema Fundamental do Cálculo *e representa o "método exato" para calcular integrais. F se diz uma* primitiva *de f e posteriormente vamos ver que f é a derivada de F. O artigo indefinido num dos sentidos se justifica porque qualquer constante que somarmos a F representa uma outra primitiva e pode ser colocada na (eq.82) e neste momento uma razão simples, que não é a fundamental, porque a (eq.82) é uma diferença, então se $G(x) = F(x) + C$ não fica alterada a (eq.82). Mais adiante você vai ver que há uma razão mais forte para que G também seja uma primitiva de f, ou como se costuma dizer, uma primitiva de f é $F + C$.*

$$\text{uma primitiva de } f(x) = x^2 \text{ é } F(x) = \frac{x^3}{3} + C \tag{83}$$

em que C é uma constante qualquer.

E o poder está chegando às suas mãos! Será possivel também derrubar a ditadura!

Altere no programa

```
define f(x) {
    return sin(x);
}

a = 0; b = 4*atan(1) ≈ π print b;

define SomaRiemann(a,b,k) {
    local soma=0,      i, deltax = 1.0*(b-a)/n;
    for (i=0;          i<k; i++) soma += f(i*deltax);
    return             soma*deltax;
}

print SomaRiemann(a,b,10000);
```

Repita usando agora $f(x) = \cos(x)$. Faça os gráficos destas funções e procure entender o que aconteceu.
Mas sobretudo, se convença de que agora *você* sabe *calcular muitas integrais* aproximadamente *e mais para frente também será capaz de calcular muitas delas,* <u>exatamente</u>.

10. <u>*somas de potências, soma de Riemann*</u> *Esta questão vai repetir as questões 7, 8 e 9 com o objetivo de calcular exatamente a integral $\int_a^b x^3 dx$ em que $[a, b]$ é um intervalo da reta. A metodologia é exatamente a mesma, apenas envolvendo agora a soma dos cubos. Para isto vou expandir a conjectura feita na questão 7, a hipótese 1, afirmando*

Hipótese 2 (Conjectura:) *(somas de potências) Assim posso espandir a conjectura sobre somas de quadrados fazendo a* conjectura *"a soma dos cubos dos termos duma p.a. é dada por dum polinômio do quarto grau.":*

$$\sum_{i=0}^{k-1} i^3 = Q_4(k-1); \text{ grau de } Q_4 \text{ é } 4; \tag{84}$$

<u>*Notação:*</u> *Vou padronizar a notação:*

- $\sum_{i=0}^{k-1} i = Q_2(k-1)$*, o grau de Q_2 é 2.*

- $\sum_{i=0}^{k-1} i^2 = Q_3(k-1)$, *o grau de* Q_3 *é* 3.
- $\sum_{i=0}^{k-1} i^3 = Q_4(k-1)$, *o grau de* Q_4 *é* 4.

Esta conjectura é um teorema e pode ser demonstrada para qualquer potência.

O objetivo desta questão é mostrar como se pode descobrir Q_4 *neste caso em que a p.a. tem razão 1. A metodologia não seria diferente para uma p.a. de razão qualquer, apenas muda a expressão do último sistema equações sem alterar sua ordem.*

(a) *(V)[ ](F)[ ]* *O sistema de equações*

$$\left\{\begin{array}{l} \sum_{i=0}^{0} i^3 = Q_4(0) = 0; \\ \sum_{i=0}^{1} i^3 = Q_4(1) = 1; \\ \sum_{i=0}^{0} i^3 = Q_4(2) = 9; \\ \sum_{i=0}^{0} i^3 = Q_4(3) = 36; \\ \sum_{i=0}^{0} i^3 = Q_4(4) = 100; \end{array}\right. \tag{85}$$

determina

$$Q_4(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + a_4x^4; \tag{86}$$

Solução 1

$$a_0 = 0 \tag{87}$$
$$a_0 + a_1 + a_2 + a_3 + a_4 = 1 \tag{88}$$
$$a_0 + a_1 2 + a_2 2^2 + a_3 2^3 + a_4 2^4 = 9 \tag{89}$$
$$a_0 + a_1 3 + a_2 3^2 + a_3 3^3 + a_4 3^4 = 36 \tag{90}$$
$$a_0 + a_1 4 + a_2 4^2 + a_3 4^3 + a_4 4^4 = 100 \tag{91}$$
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 & 8 & 16 \\ 1 & 3 & 9 & 27 & 81 \\ 1 & 4 & 16 & 64 & 256 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 9 \\ 36 \\ 100 \end{pmatrix} \tag{92}$$

$$Q_4(x) = \frac{x^2}{4} + \frac{x^3}{2} + \frac{x^4}{4}; \tag{93}$$

—————————————————

Você pode testar

$$\sum_{i=0}^{k-1} i^3 = Q_4(k-1) \tag{94}$$

usando a função `SomaPot(n,p)` *que você pode encontrar na página [5], mas observe que será* teste *e não uma demonstração. Esta demonstração precisa ser feita.*

(b) *(V)[ ](F)[ ]* *A soma de Riemann*

$$\Delta x = \frac{b-a}{k}; I = \sum_{i=0}^{k-1} f(a + i\Delta x)\Delta x = \sum_{i=0}^{k-1} (a + i\Delta x)^3 \Delta x \tag{95}$$

é uma aproximação para

$$\int_a^b x^3 dx \tag{96}$$

(c) *(V)[ ](F)[ ]*

$$\int_a^b x^3 dx = \frac{-a^4 + b^4}{4} = F(b) - F(a); \tag{97}$$

$$F(x) = \frac{x^4}{4}; \tag{98}$$

Solução 2 *Usando a conjectura 2, página 12, e a linha de ordem 3 do* triângulo de Pascal, *1 3 3 1, ou seja pelo chamado "binômio de Newton", tem-se*

$$I = \sum_{i=0}^{k-1}(a+i\Delta x)^3\Delta x = \tag{99}$$

$$= \sum_{i=0}^{k-1}\left(a^3+3a^2i\Delta x+3ai^2\Delta x^2+i^3\Delta x^3\right)\Delta x; = \tag{100}$$

$$= \sum_{i=0}^{k-1}\left(a^3\Delta x+3a^2i\Delta x^2+3ai^2\Delta x^3+i^3\Delta x^4\right); = \tag{101}$$

$$= \left\{\begin{array}{l} ka^3\Delta x+3a^2\Delta x^2Q_2(k-1)+ \\ +3a\Delta x^3Q_3(k-1)+\Delta x^4Q_4(k-1) \end{array}\right. = \tag{102}$$

$$= \left\{\begin{array}{l} a^3(b-a)+3a^2(b-a)^2\frac{Q_2(k-1)}{k^2}+ \\ +3a(b-a)^3\frac{Q_3(k-1)}{k^3}+(b-a)^4\frac{Q_4(k-1)}{k^4}; \end{array}\right. = \tag{103}$$

$$\left\{\begin{array}{l} \lim\limits_{k=\infty} a^3(b-a) = a^3(b-a); \\ \lim\limits_{k=\infty} 3a^2(b-a)^2\frac{Q_2(k-1)}{k^2} = \frac{3a^2(b-a)^2}{2}; \\ \lim\limits_{k=\infty} 3a(b-a)^3\frac{Q_3(k-1)}{k^3} = a(b-a)^3; \\ \lim\limits_{k=\infty} (b-a)^4\frac{Q_4(k-1)}{k^4} = \frac{(b-a)^4}{4}; \end{array}\right. \tag{104}$$

$$\int_a^b x^3dx = a^3(b-a)+\frac{3a^2(b-a)^2}{2}+a(b-a)^3+\frac{(b-a)^4}{4} = \tag{105}$$

$$= \frac{4a^3b-4a^4+6a^2(b-a)^2+4a(b-a)^3+(b-a)^4}{4} = \tag{106}$$

$$= \left\{\begin{array}{l} \frac{4a^3b-4a^4+6a^2(b^2-2ab+a^2)}{4}+ \\ \frac{4a(b^3-3ab^2+3a^2b-a^3)}{4}+ \\ \frac{b^4-4ab^3+6a^2b^2-4a^3b+a^4}{4}+ \end{array}\right. \tag{107}$$

$$= \left\{\begin{array}{l} \frac{4a^3b-4a^4+6a^2b^2-12a^3b+6a^4}{4}+ \\ +\frac{4ab^3-12a^2b^2+12a^3b-4a^4}{4} \\ +\frac{(b^4-4ab^3+6a^2b^2-4a^3b+a^4)}{4} \end{array}\right. \tag{108}$$

$$\frac{-a^4+b^4}{4} \tag{109}$$

Usei apenas o termo de maior grau dos polinômios Q_2, Q_3, Q_4 no cálculo dos limites. Pela soma dos limites tenho

$$\left\{\begin{array}{l} \int\limits_a^b x^3dx = \frac{-a^4+b^4}{4} = F(b)-F(a); \\ F(x) = \frac{x^4}{4}; \end{array}\right. \tag{110}$$

———————————————————

(d) <u>*(V)[ ](F)[ ]*</u>

$$\left\{\begin{array}{l} \sum\limits_{i=0}^{k-1} i^4 = Q_5(k-1);\ \textit{grau de } Q_5 \textit{ é } 5; \\ Q_5(x) = a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3+a_4x^4+a_5x^5; \\ a_5 = \frac{1}{5} \end{array}\right. \tag{111}$$

(e) <u>*(V)[ ](F)[ ]*</u>

$$\left\{\begin{array}{l} \sum\limits_{i=0}^{k-1} i^5 = Q_6(k-1);\ \textit{grau de } Q_6 \textit{ é } 6; \\ Q_6(x) = a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3+a_4x^4+a_5x^5+a_6x^6; \\ a_6 = \frac{1}{6} \end{array}\right. \tag{112}$$

Os itens (d) e (e) contém o essencial para demonstrar o Teorema Fundamental do Cálculo para funções polinomiais.

Índice Remissivo

Referências Bibliográficas

[1] Richard Courant. Gauss and the present situation of the exact sciences. In *The Spirit and the uses of the Mathematical Sciences*. McGraw-Hill, 1969.

[2] Tarcisio Gerônimo, J.R. e Praciano-Pereira. *Cálculo diferencial e integral com apoio computacional Vol I*. Departamento de Matemática da UEM, 1991.

[3] Tarcisio Gerônimo, J.R. e Praciano-Pereira. *Cálculo Diferencial e Integral com apoio computacional Vol II*. Pre-publicação do Dep. de Matemática - UEM - Maringá Pr, 1991.

[4] Tarcisio Gerônimo, J.R. e Praciano-Pereira. *Cálculo Diferencial e Integral com apoio computacional Vol III*. Pre-publicação do Dep. de Matemática - UEM - Maringá Pr, 1991.

[5] T Praciano-Pereira. Página de cálculo i, 2013.

[6] Tarcisio Praciano-Pereira. *Cálculo com apoio computacional*. Biblioteca da Universidade Federal de Goiás, 1985.

[7] Tarcisio Praciano-Pereira. *Cálculo Avançado*. Dep. de Matemática - Universidade Federal do Rio Grande - Rio Grande - RS, 1998.

[8] Tarcisio Praciano-Pereira. *Cálculo Numérico Computacional - Introdução à programação*. Publicações da UVA - Sobral - Ce, 2000.