Cálculo 1	**Lista numero 1**
números complexos	tarcisio.praciano@gmail.com
T. Praciano-Pereira	**Sobral Matemática**
alun@:	
6 de abril de 2017	**Universidade**
Produzido com LaTeX	sis. op. Debian/GNU/Linux
	www.calculo.sobralmatematica.org/

Se entregar em papel, por favor, prenda esta *folha de rosto* na solução desta lista, preenchendo seu nome. Ela será usada na correção.

Exercícios 1 *números complexos*
objetivo: *Esta lista vai conduzí-la às derivadas das funções trigonométricas* seno, cosseno.
palavras chave: fórmula de Euler, número complexo, unidade imaginaria.

1. *número complexo*

   Considere a equaçao

   $$x^2 + 3x + \frac{25}{4} = 0 \quad (1)$$

   (a) *(V)[ ](F)[ ] O radical é um número positivo e as duas raízes reais existem.*
   (b) *(V)[ ](F)[ ] as raízes existem mas não são reais, são dois os dois números complexos*

   $$z_1 = \frac{-3+4i}{2}; z_2 = \frac{-3-4i}{2}; \quad (2)$$

   (c) *(V)[ ](F)[ ] Um número complexo é apenas um número real mais complexo.*
   (d) *(V)[ ](F)[ ] Um número complexo é um novo tipo de número, um elemento dum novo conjunto,* $\mathbf{C}$ *e com eles podemos fazer as mesmas operações habituais, soma e multiplicação.*
   (e) *(V)[ ](F)[ ] Não podemos fazer as contas habituais, soma e multiplicação com números complexos.*

2. *álgebra dos números complexos Um número complexo é um par de números reais,* (a, b), *entretanto fica mais fácil pensar neles como a expressão algébrica* $a + bi$ *em que* $i = \sqrt{-1}$.

   Este novo conjunto formados dos pares $(a, b); a, b, \in \mathbf{R}$ *é o conjunto* $\mathbf{C}$ *dos números complexos.*

   A primeira coordenado do par (a, b), *se chama* parte real, a, *e a segunda se chama* parte imaginária, b.

   (a) *(V)[ ](F)[ ]* $3, 4, 5, 5 + 2i$ *são quatro números complexos sendo que os três primeiros são números reais.*
   (b) *(V)[ ](F)[ ] Um número real não é um número complexo.*
   (c) *(V)[ ](F)[ ] Todo número real é um número complexo em que* parte imaginária *é nula, em outras palavras* $\mathbf{R} \subset \mathbf{C}$.
   (d) *(V)[ ](F)[ ]* i *é um número complexo cuja parte imaginária é zero.*
   (e) *(V)[ ](F)[ ]* i *é um número complexo cuja parte imaginária é* 1 *e a parte real é zero.*

3. *álgebra dos números complexos*

   As operações com os números complexos se fazem como na álgebra da quarta série do Ensino Fundamental, como se você tivesse

   $$a + bx = a + bi; \quad (3)$$

   então

   $$(a + bi)(c + di) = ac + adi + bci + bdi^2; \quad (4)$$
   $$(a + bi)(c + di) = ac - bd + (ad + bc)i; \quad (5)$$
   $$(a + bi) + (c + di) = (a + c) + (b + d)i \quad (6)$$

   valem as regras da aritmética apenas com a extensão $i = \sqrt{-1}$;

   (a) *(V)[ ](F)[ ]*

   $$(3 + 4i)(4 + 2i) = 12 - 8 + 6i + 16i = 4 + 22i; \quad (7)$$

   (b) *(V)[ ](F)[ ]*

   $$(3 + 4i)(4 - 2i) = 12 - 8 + -6i + 16i = 4 + 10i; \quad (8)$$

   (c) *(V)[ ](F)[ ]*

   $$(3 + 4i)(4 - 2i) = 12 + 8 - 6i + 16i = 20 + 22i = 2(10 + 11i); \quad (9)$$

   (d) *(V)[ ](F)[ ]* $4 + 3i - (4 + 3i) = 0$ *é impossível de ser calculado.*
   (e) *(V)[ ](F)[ ]* $4 + 3i - (4 + 3i) = 0$ *e o zero tanto é um número real como complexo.*

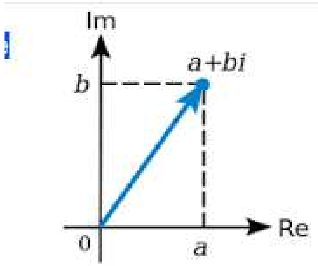
4. *fórmula de Bashara*

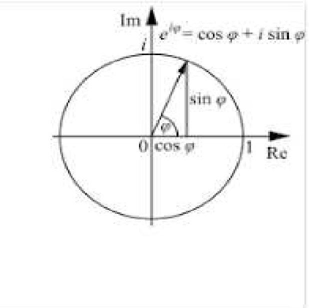
   A fórmula de Baskhara agora vale mesmo quando o discriminante da equação do segundo grau for negativo, neste caso resulta num número complexo não real.

   (a) *(V)[ ](F)[ ] Nem toda equação do segundo grau tem uma solução, não vale mais a fórmula de Baskhara.*
   (b) *(V)[ ](F)[ ] Agora toda equação do segundo grau tem uma solução, vale a fórmula de Baskhara.*
   (c) *(V)[ ](F)[ ] Não é mais possível fazermos uma interpretação geomética para uma solução duma equação do segundo grau.*
   (d) *(V)[ ](F)[ ] A solução duma equação do segundo grau é um ponto no plano complexo.*
   (e) *(V)[ ](F)[ ] A equação* $x^2 + 1 = 0$ *tem como solução* $\pm i$.

5. *número complexo, interpretação geométrica Como um número complexo é uma expressão da forma a+bi, em que a e b são números reais, então podemos vê-los, de forma equivalente a que a Física usa, agora* $j = 1$ *então é um vetor do plano complexo. Confira a figura (fig 5), página 3,*

   As figuras que aparecem nesta questão foram copiadas da Wikipedia, [2, números complexos] onde você pode encontrar mais informações sobre os números complexos.





(a) (V)[ ](F)[ ] *Se $a^2+b^2=1$ então não é possível representar o número complexo $a+bi$.*

(b) (V)[ ](F)[ ] *Se $a^2+b^2=1$ então o número complexo $a+bi$ é um ponto do círculo trigonométrico no plano complexo.*

(c) (V)[ ](F)[ ] *A figura (fig 5), página 3,*
mostra o círculo trigonométrico, dos números reais de módulo 1.

(d) (V)[ ](F)[ ] *A figura (fig 5), página 3, mostra o círculo trigonométrico, um subconjunto dos números complexos, aqueles que têm módulo 1.*

(e) (V)[ ](F)[ ] *A figura (fig 5), página 3, mostra o círculo trigonométrico onde o número complexo*

$$(\cos(\phi)+i\sin(\phi))$$

determina, com a origem do círculo $(1,0)$, o arco de tamanho ϕ. O maior arco que pode assim ser determinado mede 2π e esta figura sugere que $\phi < 2\pi$.

6. *Fórmula de Euler*

(a) (V)[ ](F)[ ] *Um ponto qualquer do círculo trigonométrico tem por coordenadas* $\sin(\theta), \cos(\theta)$ *em que θ é a medida do arco de circunferência que este ponto determina junto com a origem $(1,0)$ que corresponde ao ângulo, ou arco zero.*

(b) (V)[ ](F)[ ] *Um ponto qualquer do círculo trigonométrico tem por coordenadas* $\cos(\theta), \sin(\theta)$ *em que θ é a medida do arco de circunferência que este ponto determina junto com a origem $(1,0)$ que corresponde ao ângulo, ou arco zero.*

(c) (V)[ ](F)[ ] *A identidade3 fundaental da trigonometria é uma forma de caracterização do círculo trigonométrico.*

(d) (V)[ ](F)[ ] *A identidade3 fundaental da trigonometria caracteria o conjunto dos números complexo de módulo 1.*

(e) (V)[ ](F)[ ] *O número complexo $a-bi$ é chamado de* conjugado *do número complexo $a+bi$ e o produto deles é o número real positivo a^2+b^2.*

7. *conjugado dum número complexo O número complexo $a-bi$ é chamado de* conjugado *do número complexo $a+bi$ e o produto deles é o número real positivo a^2+b^2.*

(a) (V)[ ](F)[ ] *$a+bi$ é simétrico com $a-bi$ relativamente ao eixo OX.*

(b) (V)[ ](F)[ ] *$a+bi$ é simétrico com $a-bi$ relativamente ao eixo OY.*

(c) (V)[ ](F)[ ]

(d) (V)[ ](F)[ ] *Se $a^2+b^2 \neq 0$ então o número complexo $z=a+bi$ tem inverso multiplicativo que é*

$$\frac{1}{z} = \frac{a}{a^2+b^2} + i\frac{b}{a^2+b^2} \tag{10}$$

(e) (V)[ ](F)[ ] *Não é possível calcular-se o inverso multiplicativo dum número complexo.*

8. *fórmula de Euler*

Considere a identidade como uma definição

$$e^{it} = (\cos(t)+i\sin(t)) \tag{11}$$

(a) (V)[ ](F)[ ] *e^{it} designa um ponto sobre o círculo trigonométrico.*

(b) (V)[ ](F)[ ] $e^{it}e^{-it}=0$

(c) (V)[ ](F)[ ] *$e^{it}e^{-it}=1$ e como e^{-it} é o conjugado de e^{it} então, no círculo trigonométrico, o conjugado de z é o seu inverso multiplicativo: $z\overline{z}=1$.*

(d) (V)[ ](F)[ ] *Dado um número complexo z qualquer, considerado como um ponto do plano. O ponto z e a origem determinam uma reta passando por*

$$(\cos(\theta)+i\sin(\theta)) = e^{i\theta};; \tag{12}$$
$$(\cos(-\theta)+i\sin(-\theta)) = e^{-i\theta};; \tag{13}$$

(e) (V)[ ](F)[ ] *Dado um número complexo z qualquer, considerado como um ponto do plano. O ponto z e a origem determinam uma reta passando por*

$$(\cos(\theta)+i\sin(\theta)) = e^{i\theta};; \tag{14}$$
$$-(\cos(\theta)-i\sin(\theta)) = -e^{i\theta};; \tag{15}$$

que é um par números inversos aditivamente.

9. *função complexa*

Considere a função

$$f(z) = z^2-1; \tag{16}$$

(a) <u>(V)[ ](F)[ ]</u> $f(0) = 1$

(b) <u>(V)[ ](F)[ ]</u> $f'(z) = 2z$;

(c) <u>(V)[ ](F)[ ]</u> *Se* $F(z) = \frac{z^3}{3} - z + 10$ *então* $F'(z) = f(x)$;

(d) <u>(V)[ ](F)[ ]</u> *Se* $F(z) = \frac{z^3}{3} - z + 1$ *então* $F'(z) = f(x)$;

(e) <u>(V)[ ](F)[ ]</u> *Se* $F(z) = \frac{z^3}{3} - z$ *então* $F'(z) = f(x)$;

10. <u>*números complexos*</u>

Considere as funções f, F *definidas pelas equações:*

$$f(t, r) = A\left(\cos(t), \sin(t)\right); \tag{17}$$

$$F(t, r) = A\left(\cos(t) + i\sin(t)\right); \tag{18}$$

$$t \in [0, 2\pi); A \in \mathbf{R}^{++}; \tag{19}$$

A é uma constante dada.

(a) <u>(V)[ ](F)[ ]</u> $f(t, A)$ *é um vetor qualquer do plano* $\mathbf{R}^2$ *sobre o círculo de raio* $|A|$.

(b) <u>(V)[ ](F)[ ]</u> $F(t, A)$ *é um vetor qualquer do plano complexo* $\mathbf{C}$ *sobre o círculo de raio* $|A|$.

(c) <u>(V)[ ](F)[ ]</u>

$$f'(t, A) = A\left(\cos(t), \sin(t)\right)' = A\left(\cos'(t), \sin'(t)\right)$$

porque

$$f(t + h, A) - f(t, A) = A\left(\cos(t + h) - \cos(t), \sin(t + h) - \sin(t)\right); \tag{20}$$

$$\frac{f(t+h,A)-f(t,A)}{h} = \left(\frac{\cos(t+h)-\cos(t)}{h}, \frac{\sin(t+h)-\sin(t)}{h}\right); \tag{21}$$

$$\lim_{h=0} \frac{f(t+h,A)-f(t,A)}{h} = \left(\lim_{h=0} \frac{\cos(t+h)-\cos(t)}{h}, \lim_{h=0} \frac{\sin(t+h)-\sin(t)}{h}\right); \tag{22}$$

se estes limites existirem.

(d) <u>(V)[ ](F)[ ]</u> *Como i é uma constante e a derivada de* $t \mapsto e^{at}$ *é* $ta \mapsto e^{at}$ *então*

$$F'(t, r) = Ai\left(\cos(t) + i\sin(t)\right) = A\left(-\sin(t) + i\cos(t)\right);$$

(e) <u>(V)[ ](F)[ ]</u> *Como as imagens das duas funções coincidem,* $f(t), F(t)$ *então os limites*

$$f(t + h, A) - f(t, A) = A\left(\cos(t + h) - \cos(t), \sin(t + h) - \sin(t)\right); \tag{23}$$

$$\frac{f(t+h,A)-f(t,A)}{h} = \left(\frac{\cos(t+h)-\cos(t)}{h}, \frac{\sin(t+h)-\sin(t)}{h}\right); \tag{24}$$

$$\lim_{h=0} \frac{f(t+h,A)-f(t,A)}{h} = \left(\lim_{h=0} \frac{\cos(t+h)-\cos(t)}{h}, \lim_{h=0} \frac{\sin(t+h)-\sin(t)}{h}\right); \tag{25}$$

tem que existir e valem, respctivamante,

$$\lim_{h=0} \frac{\cos(t+h)-\cos(t)}{h} = -\sin(t); \tag{26}$$

$$\lim_{h=0} \frac{\sin(t+h)-\sin(t)}{h} = \cos(t); \tag{27}$$

$$\sin'(t) = \cos(t); \cos'(t) = -\sin(t); \tag{28}$$

Índice Remissivo

Referências Bibliográficas

[1] Richard Courant. Gauss and the present situation of the exact sciences. In *The Spirit and the uses of the Mathematical Sciences*. McGraw-Hill, 1969.

[2] Wikimedia Foundation. Wikipedia, enciclopédia livre na internet. http://www.wikipedia.org.

[3] Tarcisio Gerônimo, J.R. e Praciano-Pereira. *Cálculo diferencial e integral com apoio computacional Vol I*. Departamento de Matemática da UEM, 1991.

[4] Tarcisio Gerônimo, J.R. e Praciano-Pereira. *Cálculo Diferencial e Integral com apoio computacional Vol II*. Pre-publicação do Dep. de Matemática - UEM - Maringá Pr, 1991.

[5] Tarcisio Gerônimo, J.R. e Praciano-Pereira. *Cálculo Diferencial e Integral com apoio computacional Vol III*. Pre-publicação do Dep. de Matemática - UEM - Maringá Pr, 1991.

[6] T Praciano-Pereira. Página de cálculo i, 2013.

[7] Tarcisio Praciano-Pereira. *Cálculo com apoio computacional*. Biblioteca da Universidade Federal de Goiás, 1985.

[8] Tarcisio Praciano-Pereira. *Cálculo Avançado*. Dep. de Matemática - Universidade Federal do Rio Grande - Rio Grande - RS, 1998.

[9] Tarcisio Praciano-Pereira. *Cálculo Numérico Computacional - Introdução à programação*. Publicações da UVA - Sobral - Ce, 2000.