Cálculo I | **Lista número 07**
Logaritmo e exponencial | tarcisio.praciano@gmail.com
T. Praciano-Pereira | **Dep. de Computação**

alun@:

Univ. Estadual Vale do Acaraú | 23 de outubro de 2010
página da disciplina | www.calculo.sobralmatematica.org

Documento produzido com LaTeX | sis. op. Debian/Gnu/Linux

0.1 Informações

0.1.1 Objetivo

Esta lista vai lidar com a função $y = f(x) = \frac{1}{x}$ cuja integral não pode ser calculada com o `Teorema Fundamental do Cálculo` porque ela não tem uma primitiva que possa ser expressa em termos de outras funções conhecidas.

A primitiva de $y = f(x) = \frac{1}{x}$ é uma nova função, a função `logaritmo`, a única forma de calcular esta integral é *aproximadamente*.

Você já conhece `logaritmo` desde o Ensino Médio porém a metodologia usada aqui é própria do Curso de Cálculo. É *surpreendente* a quantidade de instrumentos teóricos que serão usados para atingir este objetivo: tudo que estudamos até agora. Considere esta lista uma revisão da materia toda.

Você irá encontrar mais informações sobre Logaritmo nesta página da wikipedia http://es.wikipedia.org/wiki/Logaritmo

Palavras chave cálculo aproximado da integral, exponencial, função inversa, integração aproximada, logaritmo.

0.2 Exercícios

1. Entendendo continuidade A função $y = f(x)$ é definida pelas equações:

$$f(x) = \begin{cases} x < 0 & 0 \\ x \geq 0 & x^2 \end{cases} \tag{1}$$

(a) (V)[ ](F)[ ] A derivada de f é

$$f(x) = \begin{cases} x < 0 & 0 \\ x \geq 0 & 2 \end{cases} \tag{2}$$

(b) (V)[ ](F)[ ] A derivada de f é

$$f(x) = \begin{cases} x < 0 & 0 \\ x \geq 0 & 2x \end{cases} \tag{3}$$

(c) (V)[ ](F)[ ] A segunda derivada de f é

$$f(x) = \begin{cases} x < 0 & 0 \\ x \geq 0 & 2 \end{cases} \tag{4}$$

(d) (V)[ ](F)[ ] A figura (1) página 2, mostra os gráficos de f, f' e f''.

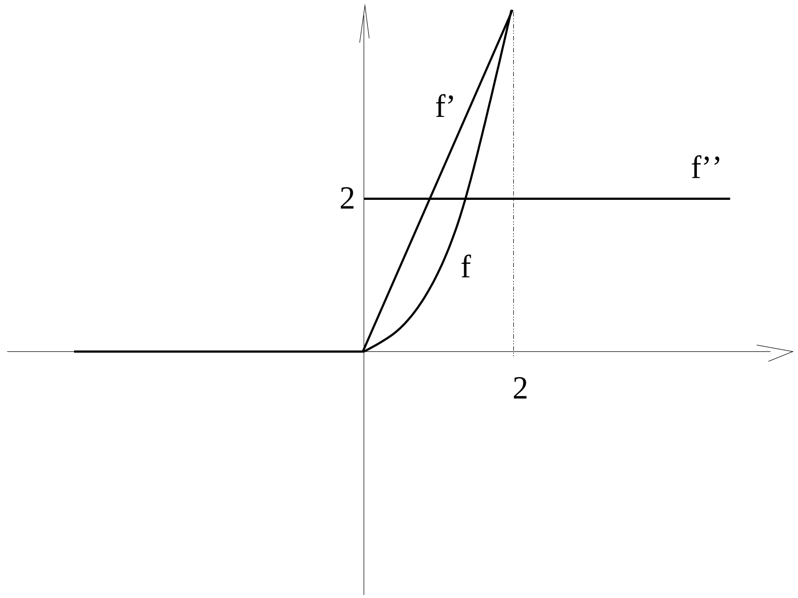

Figura 1: Velocidade e aceleração

(e) (V)[ ](F)[ ] As funções f, f' são contínuas mas f'' não é contínua.

2. Propriedades da função $f(x) = \frac{1}{x}$

(a) (V)[ ](F)[ ] O domínio de $f(x) = \frac{1}{x}$ é o conjunto dos números reais positivos.

(b) (V)[ ](F)[ ] O domínio de $f(x) = \frac{1}{x}$ é o conjunto de todos os números reais exceto o zero, $\mathbf{R} - \{0\}$.

(c) (V)[ ](F)[ ] A derivada da função $f(x) = \frac{1}{x}$ é positiva e ela é uma função crescente.

(d) (V)[ ](F)[ ] A derivada da função $f(x) = \frac{1}{x}$ é negativa e ela é uma função decrescente.

(e) (V)[ ](F)[ ] Para grandes valores de $|x|$ $|f(x)| = |\frac{1}{x}|$ é arbitrariamente pequena e porisso dizemos que $\lim\limits_{x=\pm\infty} f(x) = 0$.

3. Gráfico da função $f(x) = \frac{1}{x}$

   (a) (V)[ ](F)[ ] A função $y = f(x) = \frac{1}{x}$ é uma função par, quer dizer, $f(-x) = f(x)$.

   (b) (V)[ ](F)[ ] A função $y = f(x) = \frac{1}{x}$ é uma função impar, quer dizer, $f(-x) = -f(x)$.

   (c) (V)[ ](F)[ ] Para $y = f(x) = \frac{1}{x}$, se $x > 0$ então $f(\frac{1}{x}) = \frac{1}{f(x)}$ do que se pode deduzir que
   $$f([1, \infty)) = (0, 1];$$
   Esta afirmação pode ser traduzida, geométricamente, dizendo-se que a imagem da semireta $[1, \infty)$ se encontra dentro da faixa $[1, \infty)$ x $(0, 1]$ 1

   (d) (V)[ ](F)[ ] O gráfico de $f(x) = \frac{1}{x}$ é o que aparece na figura (2) página 3,

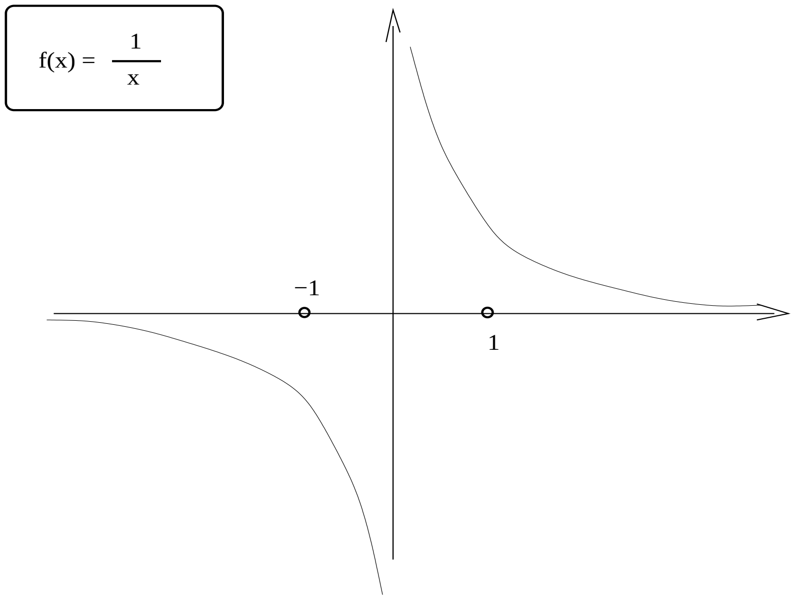

Figura 2: gráfico de $f(x) = \frac{1}{x}$ feito à mão com `xfig`

   (e) (V)[ ](F)[ ] a função $f(x) = \frac{1}{x}$ é contínua em qualquer intervalo que não contenha o zero.

4. Integral da função $f(x) = \frac{1}{x}$ Como não temos nenhuma regra para calcular a integral desta função[1], a saída será calculá-la, aproximadamente, por exemplo, com somas de Riemann. Vamos descobrir propriedades que permitirão um cálculo mais rápido.

   (a) (V)[ ](F)[ ] $\int\limits_1^{10} \frac{dx}{x} \approx \sum\limits_{k=0}^{n-1} \frac{9}{n} \frac{1}{k(9/n)}$

   (b) (V)[ ](F)[ ] $\int\limits_1^{10} \frac{dx}{x} \approx \frac{9}{n} \sum\limits_{k=0}^{n-1} \frac{1}{1+k(9/n)}$

   (c) (V)[ ](F)[ ] Se $ab > 0$ podemos calcular $\int\limits_a^b \frac{dx}{x}$ *porque esta relação corresponde a um intervalo* $[a, b]$ (ou $[b, a]$) sobre o qual $f(x) = \frac{1}{x}$ é contínua.

   (d) (V)[ ](F)[ ] Uma aproximação para $\int\limits_a^b \frac{dx}{x}$ é
   $$\sum_{k=0}^{n-1} \frac{\Delta x}{a + k\Delta x} \ ; \ \Delta x = \frac{b-a}{n}$$

   (e) (V)[ ](F)[ ] Os cálculos abaixo estão corretos. O símbolo ":=" se lê "faça", e serve para redefinir uma expressão usando, eventualmente, um valor anterior da mesma (recursivamente).
   $$0 < a < b; \Delta x = \frac{b-a}{n}; \tag{5}$$
   $$\int\limits_a^b \frac{dx}{x} \approx I = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\Delta x}{a+k\Delta x} = \Delta x \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{a+k\Delta x}; \tag{6}$$
   $$I = \Delta x \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1/a}{1+k\Delta x/a} = \Delta x/a \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{1+k\Delta x/a} \tag{7}$$
   $$\Delta x := \frac{b/a-1}{n} = \frac{b-a}{an} = \Delta x/a; \tag{8}$$
   $$\Delta x = \frac{b/a-1}{n}; I = \Delta x \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{1+k\Delta x}; \tag{9}$$
   $$I \approx \int\limits_1^{b/a} \frac{dx}{x}; \tag{10}$$
   Conclusão: Observando que o intervalo de integração "aparece" no numerador do cálculo do "Δx", posso concluir que
   $$\int\limits_a^b \frac{dx}{x} = \int\limits_1^{b/a} \frac{dx}{x};$$

[1]experimente a regra da potência!

posso “cancelar” o limite inferior nos limites de integração desta integral. Esta é uma propriedade particular da integral da função $f(x) = \frac{1}{x}$.

5. Propriedades da integral de $f(x) = \frac{1}{x}$

   (a) (V)[ ](F)[ ] A integral da função $f(x) = \frac{1}{x}$ no intervalo $[a, b]$; $a, b > 0$ é igual a integral da função $f(x) = \frac{1}{x}$ no intervalo $[1, b/a]$. Por exemplo:

$$\int_2^{10} \frac{dx}{x} = \int_1^5 \frac{dx}{x}; \tag{11}$$

$$\int_{10}^{100} \frac{dx}{x} = \int_1^{10} \frac{dx}{x} = \int_1^2 \frac{dx}{x} + \int_2^{10} \frac{dx}{x} = \int_1^2 \frac{dx}{x} + \int_1^5 \frac{dx}{x}; \tag{12}$$

$$\int_{100}^{1000} \frac{dx}{x} = \int_1^{10} \frac{dx}{x} = \int_1^2 \frac{dx}{x} + \int_1^5 \frac{dx}{x}; \tag{13}$$

   (b) (V)[ ](F)[ ] As contas seguintes estão corretas:

$$5000 = 2 \text{ x } 2 \text{ x } 2 \text{ x } 5 \text{ x } 5 \text{ x } 5 \text{ x } 5 = 2^3 5^4; \tag{14}$$

$$I = \int_1^{5000} \frac{dx}{x} = \int_1^{10} \frac{dx}{x} + \int_{10}^{5000} \frac{dx}{x}; \tag{15}$$

$$I = \int_1^{10} \frac{dx}{x} + \int_{10}^{1000} \frac{dx}{x} + \int_{1000}^{5000} \frac{dx}{x}; \tag{16}$$

$$I = \int_1^{10} \frac{dx}{x} + \int_{10}^{100} \frac{dx}{x} + \int_{100}^{1000} \frac{dx}{x} \int_{1000}^{5000} \frac{dx}{x}; \tag{17}$$

$$\int_1^{10} \frac{dx}{x} = \int_1^2 \frac{dx}{x} + \int_1^5 \frac{dx}{x} \quad \Rightarrow \quad I = 3\int_1^2 \frac{dx}{x} + 4\int_1^5 \frac{dx}{x}; \tag{18}$$

   (c) (V)[ ](F)[ ]

$$32 = 2^5; \tag{19}$$

$$\int_1^{32} \frac{dx}{x} = 5\int_1^2 \frac{dx}{x} \tag{20}$$

   (d) (V)[ ](F)[ ]

$$a = b^n; b > 0; \tag{21}$$

$$\int_1^b \frac{dx}{x} = n\int_1^a \frac{dx}{x} \tag{22}$$

   (e) (V)[ ](F)[ ]

$$c = ab; a, b > 0; \tag{23}$$

$$\int_1^c \frac{dx}{x} = \int_1^a \frac{dx}{x} + \int_a^{ab} \frac{dx}{x} \tag{24}$$

$$\int_1^{ab} \frac{dx}{x} = \int_1^a \frac{dx}{x} + \int_1^b \frac{dx}{x} \tag{25}$$

$$\tag{26}$$

Na questão 5, lidamos com uma nova função, $y = ln(x)$, definida via integral da função $f(x) = \frac{1}{x}$. Com a notação padrão de primitiva, f, F, posso escrever:

derivada	uma primitiva
y = f(x) = F'(x);	F(x) = ln(x) = $ln(x) = \int_1^x \frac{dt}{t}$;

Notação: a função $F(x) = ln(x) = \int_1^x \frac{dt}{t}$ se chama *logaritmo natural*.

Neste momento, a única forma de calcular o logaritmo é usando *somas de Riemann*, em Cálculo Numérico você irá estudar métodos mais eficientes.

Relembrando algumas definições:

$$\int_a^b f(x)dx; f(x) = \frac{1}{x}\ ;\ a, b > 0; \tag{27}$$

$$\int_a^b f(x)dx \approx \sum_{k=0}^{n-1} f(a + k * \Delta x)\Delta x \tag{28}$$

Os programas `exer07_05.calc`, `exer07_05.gnuplot`, que podem ser baixados do link “programas” da página, calculam os valores de $ln(c)$ para qualquer número que você escolher, aproximadamente, usando somas de Riemann. Obviamente, é importante calcular os logaritmos dos fatores primos de números inteiros:

```
valor aproximado do ln(2)  -->  0.69389724305993749692
valor aproximado do ln(3)  -->  1.09927902940884220169
valor aproximado do ln(6)  -->  1.79234288357989852577
 ln(2) + ln(3) = ln(6)
0.69389724305993749692 + 1.09927902940884220169  =
1.79234288357989852577
```

Ao final da lista você encontra uma tabela de logaritmos, 0.2 calculada, e editada em LaTeX, usando um programa escrito em `calc`.

6. Propriedade do logaritmo natural

(a) (V)[ ](F)[ ] Domínio de $y = ln(x)$ é a reta estritamente positiva, quer dizer, não podemos calcular a integral para $x \leq 0$.

(b) (V)[ ](F)[ ] Se $a, b > 0$ então

$$ln(ab) = \int_1^{ab} \frac{dt}{t} = \int_1^{a} \frac{dt}{t} + \int_a^{ab} \frac{dt}{t} = ln(a) + ln(b);$$

(c) (V)[ ](F)[ ]

$$\begin{cases} c = 1 & ln(c) = 0; \\ c < 1 & ln(c) < 0; \\ c > 1 & ln(c) > 0; \end{cases} \tag{29}$$

$$ln(c) = \int_1^{c} \frac{dx}{x} = \int_{1/c}^{1} \frac{dx}{x} = -\int_1^{1/c} \frac{dx}{x} = -ln(1/c); \tag{30}$$

(d) (V)[ ](F)[ ] $ln(a/b) = ln(a) - ln(b)$

(e) (V)[ ](F)[ ] $y = ln(x) = \int_1^{x} \frac{dx}{x}$ então $y = ln'(x) = \frac{1}{x}$, é sempre positiva, assim, $y = ln(x)$ é uma funçao crescente, negativa no intervalo $(0, 1]$, positiva no intervalo $[1, \infty)$ tal que $ln(1) = 0$ então o seu gráfico é o que se encontra na figura (3) página 8,

7. Propriedades da inversa do logaritmo $y = e^x$

(a) (V)[ ](F)[ ] Como $y = ln(x)$ é uma função estritamente crescente, então é bijetiva e tem inversa. Notação a inversa de $y = ln(x)$ é $y = e^x$ e seu gráfico pode ser obtido por rebatimento em torno da primeira bisetriz do gráfico na figura (3). O resultado é o gráfico na figura (4) página 9,

(b) (V)[ ](F)[ ] Como $ln(ab) = ln(a) + ln(b)$ então $e^{ab} = e^a + e^b$.

(c) (V)[ ](F)[ ] Como $ln(ab) = ln(a) + ln(b)$ então $e^{a+b} = e^a e^b$.

(d) (V)[ ](F)[ ]

- Como $ln(1) = 0$ então $e^0 = 1$;
- o domínio da exponencial é $\mathbf{R}$;
- e o seu conjunto de valores é $\mathbf{R}^{++}$;
- $exp : \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R}^{++}$
- $e^x > 0$ para todo $x \in \mathbf{R}$;
- $e^{-a} = \frac{1}{e^a}$;

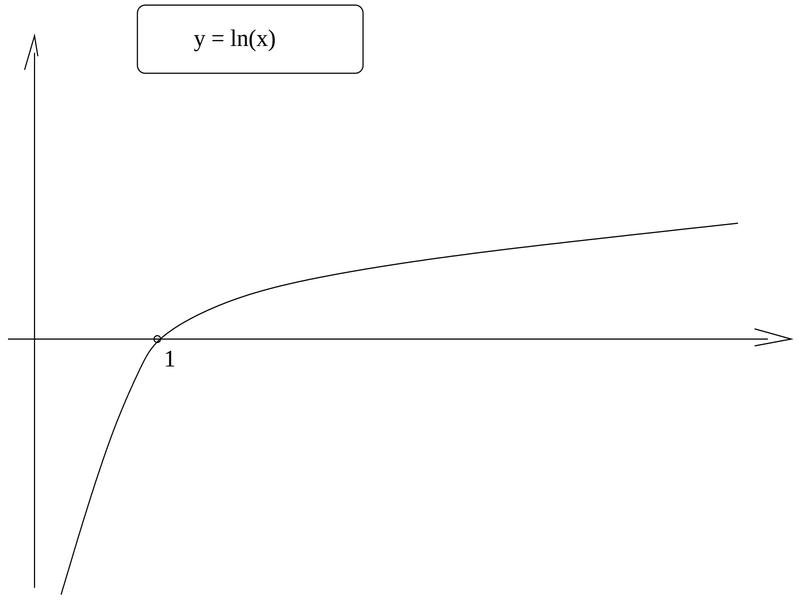

Figura 3: gráfico feito à mão, com `xfig`, de $y = ln(x)$

(e) (V)[ ](F)[ ] Derivada da exponencial Como

$$y = f(x) = exp(x) \text{ e } x = g(y) = ln(y)$$

é um par de funções inversas então

$$f(g(y)) = x \quad \Rightarrow \quad [f(g(y))]' = f'(g(y))g'(y) = 1 \tag{31}$$

$$f'(g(y)) = \frac{1}{g'(y)} = \frac{1}{\frac{1}{y}} = y = exp(x) \tag{32}$$

$$f'(x) = exp(x) = f(x) \tag{33}$$

Conclusão: a exponencial, $y = e^x$ é a única função cuja derivada é ela mesma: $[e^x]' = e^x$.

$$\begin{cases} \frac{d}{dx} e^{\alpha x} = \alpha e^{\alpha x} \\ e^{ln(x)} = x; e^{a ln(x)} = e^{ln(x^a)} = x^a; \\ e^{ix} = \cos(x) + i\sin(x) \\ \frac{d}{dx} e^{ix} = ie^{ix} = -\sin(x) + i\cos(x) \end{cases} \tag{34}$$

8. Desenvovimentos de Taylor - McLaurin Todas as derivadas de $y = e^x$, na origem, são iguais a 1. Usando a notação de Leibniz $\frac{d^n e^x}{dx^n}|_{x=0} = 1$ para qualquer que seja $n \in \mathbf{N}$.

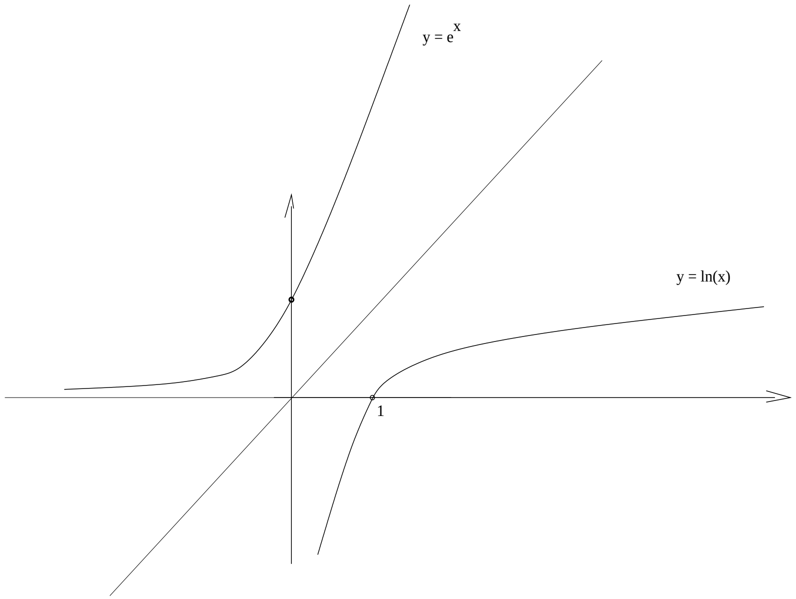

Figura 4: gráficos feitos á mão, com `xfig`, da Exponencial e do logaritmo

É possível escrevermos o desenvolvimento de Taylor de qualquer ordem para $y = e^x$ na origem, uma vez que sabemos que todas as suas derivadas valem 1 nese ponto:

(a) (V)[ ](F)[ ]

$$e^x \approx 1 + x + \frac{x}{2} + \frac{x^3}{3}$$

(b) (V)[ ](F)[ ]

$$e^x \approx 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3!} + \cdots \frac{x^n}{n!}$$

(c) (V)[ ](F)[ ]

$$e \approx 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots \frac{1}{n}$$

(d) (V)[ ](F)[ ]

$$e \approx 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3!} + \cdots \frac{1}{n!}$$

(e) (V)[ ](F)[ ] $e \approx 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{1}{7!} = 2.71825396825396825397$

x	log x
0	1
0.00625	1.005473512
0.0125	1.010976983333614144
0.01875	1.01651057798361448102
0.025	1.02207446083033473069
0.03125	1.02766879765658309780
0.0375	1.03329375515258197726
0.04375	1.03894950092093469655
0.05	1.04463620348161944366
0.05625	1.05035403227701052946
0.0625	1.05610315767692713392
0.06875	1.06188375098370968671
0.075	1.06769598443732403349
0.08125	1.07354003122049353983
0.0875	1.07941606546385928587
0.09375	1.08532426225116850524
0.1	1.09126479762449142306
0.10625	1.09723784858946664836
0.1125	1.10324359312057527713
0.11875	1.10928221016644386336
0.125	1.11535387965517641584
0.13125	1.12145878249971557982
0.1375	1.12759710060323316304
0.14375	1.13376901686455016700
0.15	1.13997471518358648471
0.15625	1.14621438046684042754
0.1625	1.15248819863289824422
0.16875	1.15879635661797379635
0.175	1.16513904238147855534
0.18125	1.17151644491162208680
0.1875	1.17792875423104318923
0.19375	1.18437616140247185490
0.2	1.19085885853442222142
0.20625	1.19737703878691668386
0.2125	1.20393089637724133778