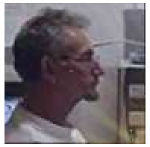

Cálculo I **Lista número 06**, 10 de outubro de 2010
Polinômio de Taylor
tarcisio.praciano@gmail.com
prof. T. Praciano-Pereira
Dep. de Computação UeVA

alun@:

www.calculo.sobralmatematica.org
Documento produzido com LaTeX sis. op. Debian/Gnu/Linux

Data da entrega da lista: dia 18 de Outubro, segunda-feira.

0.0.1 Objetivo

Esta lista está baseada no texto de apoio publicado na página.

Consulte também a página
http://pt.wikipedia.org/wiki/Derivada
Os programas (scripts para `gnuplot`),
`exer06_02_e.gnuplot`, `exer06_04_e.gnuplot`
se encontram na página, no link "programas".

Palavras chave aproximação polinomial, derivada segunda, derivada terceira, derivada de ordem n, desenvolvimento limitado, Polinômio de McLaurin, Polinômio de Taylor, Regra de L'Hôpital

0.1 Exercícios

1. Polinômio de Taylor Considere o polinômio

$$P(x) = a_0 + a_1(x-a) + a_2(x-a)^2 + a_3(x-a)^3;$$

(a) (V)[ ](F)[ ] As derivadas de P são

$$P'(x) = a_1; P''(x) = 2a_2; P'''(x) = 3a_3$$

(b) (V)[ ](F)[ ] As derivadas de P são

$$P'(x) = a_1 + 2a_2(x-a) + 3a_3(x-a)^2; \quad (1)$$
$$P''(x) = 2a_2 + 6a_3(x-a); \quad (2)$$
$$P'''(x) = 6a_3 \quad (3)$$
$$P^{(iv)}(x) = 0; \quad (4)$$

(c) (V)[ ](F)[ ] As derivadas de P no ponto $x = a$ são

$$P(a) = a_0; P'(a) = a_1; P''(a) = 2a_2; P'''(a) = 6a_3$$

(d) (V)[ ](F)[ ] Se a função f tiver derivadas, pelo menos até 3 ordem em um intervalo contendo o ponto $x = a$, então é possível encontrar um polinômio do terceiro grau, que melhor tangencia o gráfico de f no ponto $(a, f(a))$ e a equação deste polinômio (polinômio de Taylor) é

$$P(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2}(x-a)^2 + \frac{f'''(a)}{3}(x-a)^3 \quad (5)$$

(e) (V)[ ](F)[ ] Se a função f tiver derivadas, pelo menos até 3 ordem em um intervalo contendo o ponto $x = a$, então é possível encontrar um polinômio do terceiro grau, que melhor tangencia o gráfico de f no ponto $(a, f(a))$ e a equação deste polinômio (polinômio de Taylor) é

$$P(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2}(x-a)^2 + \frac{f'''(a)}{6}(x-a)^3 \quad (6)$$

2. Polinômio de Taylor Para obter o polinômio de Taylor de grau três

$$P(x) = a_0 + a_1(x-a) + a_2(x-a)^2 + a_3(x-a)^3$$

que melhor tangência o gráfico de f no ponto $x = a$ é verdade que

(a) (V)[ ](F)[ ] A função f não precisa ter derivadas.

(b) (V)[ ](F)[ ] A função f precisa ter pelo menos derivadas até a ordem três.

(c) (V)[ ](F)[ ] O seguinte sistema de equações deve ser satisfeito:

$$\begin{cases} P(a) = f(a) & \Rightarrow \quad a_0 = f(a); \\ P'(a) = f'(a) & \Rightarrow \quad a_1 = f'(a); \\ P''(a) = f''(a) & \Rightarrow \quad a_2 = f''(a); \\ P'''(a) = f'''(a) & \Rightarrow \quad a_3 = f'''(a); \end{cases} \quad (7)$$

(d) (V)[ ](F)[ ] O seguinte sistema de equações deve ser satisfeito:

$$\begin{cases} P(a) = f(a) & \Rightarrow \quad a_0 = f(a); \\ P'(a) = f'(a) & \Rightarrow \quad a_1 = f'(a); \\ P''(a) = f''(a) & \Rightarrow \quad a_2 = \frac{f''(a)}{2!}; \\ P'''(a) = f'''(a) & \Rightarrow \quad a_3 = \frac{f'''(a)}{3!}; \end{cases} \quad (8)$$

(e) (V)[ ](F)[ ] Considere o polinômio

$$P(x) = 1 + x + x^5$$

como ele tem derivadas de qualquer ordem, posso escrever um polinômio, desenvolvido no ponto $x = a$ identico a este polinômio com a expressão

$$Q(x) = P(a) + P'(a)(x-a) + \frac{P''(a)}{2!}(x-a)^2 + \frac{P'''(a)}{3!}(x-a)^3 + \frac{P^{(iv)}(a)}{4!}(x-a)^4 + \frac{P^{(v)}(a)}{5!}(x-a)^5 \quad (9)$$

e isto pode ser testado com gnuplot com o script `exer06_02_e.gnuplot`

3. Dois polinômios de grau n Supondo que você tenha feito a questão 9 e tenha testado (feito experiencias com) o programa `exer06_02_e.gnuplot`

   (a) (V)[ ](F)[ ] Se dois polinômios do grau n coincidirem em $n+1$ pontos, eles são idênticos.

   (b) (V)[ ](F)[ ] Dado um polinômio do grau n, P. O polinômio de grau n, Q obtido com o desenvolvimento de Taylor de P coincide com P.

   (c) (V)[ ](F)[ ] Posso usar o desenvolvimento de Taylor para re-escrever um polinômio como potências de $(x-a)$ para qualquer valor de a. O resultado será um polinômio do mesmo grau que o primitivo, os dois gráficos coincidem.

   (d) (V)[ ](F)[ ] Se dois polinômios do grau n tiverem todas suas derivadas coincidindo em um determinado ponto $(x-a)$ e se também tiverem o mesmo valor no ponto $(x-a)$, eles simplesmente coincidem em todos os pontos de $\mathbf{R}$.

   (e) (V)[ ](F)[ ] Se

$$P(x) = a_0 + a_1(x-a) + a_2(x-a)^2 + \cdots a_n(x-a)^n$$

   e

$$Q(x) = P(a) + P'(a)(x-a) + \frac{P''(a)}{2}(x-a)^2 + \ldots \frac{P^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$$

   então P, Q são os mesmo polinômios.

4. Desenvolvimento limitado - Taylor do seno Quando o desenvolvimento de Taylor for feito na origem, é chamado de polinômio de McLaurin.

   (a) (V)[ ](F)[ ] As derivadas do seno, na origem são

$$-1, 1, -1, 1, -1, 1, \ldots$$

   (b) (V)[ ](F)[ ] As derivadas do seno, na origem são

$$-1, 0, 1, 0, -1, 0, 1, 0, -1, 0, 1, 0, \ldots$$

   (c) (V)[ ](F)[ ] Um polinômio de Taylor para o seno, desenvolvido na origem é

$$P(x) = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \frac{x^9}{9} \qquad (10)$$

   (d) (V)[ ](F)[ ] O polinômio de Taylor de grau 9, para o seno, desenvolvido na origem é

$$P(x) = x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} - \frac{x^7}{7!} + \frac{x^9}{9!} \qquad (11)$$

   (e) (V)[ ](F)[ ] O polinômio de Taylor de grau 8, para o coseno, desenvolvido na origem é

$$P(x) = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} - \frac{x^6}{6!} + \frac{x^8}{8!} \qquad (12)$$

   Você pode visualisar os gráficos do coseno e deste polinômio de grau 8 usando o script para `gnuplot` `exer06_04_e.gnuplot`

5. Colagem diferenciável Considere os dois polinômios

$$\begin{cases} P_1(x) = & (x+3)x; \\ P_2(x) = & x(x-4)x; \end{cases} \qquad (13)$$

   (a) (V)[ ](F)[ ] Se a função $y = f(x)$ estiver definida pelas equações

$$\begin{cases} x \le 0 & a_{1,0} = P_1(-3); a_{1,1} = P_1'(-3); a_{1,2} = P_1''(-3); \\ x \le 0 & f(x) = a_{1,0} + a_{1,1}(x+3) + a_{1,2}(x+3)^2 \\ x > 0 & a_{2,0} = P_2(4); a_{2,1} = P_2'(4); a_{2,2} = P_2''(4); a_{2,3} = P_2'''(4); \\ x \le 0 & f(x) = a_{2,0} + a_{2,1}(x-4) + a_{2,2}(x-4)^2 + a_{2,3}(x-4)^3 \end{cases} \qquad (14)$$

   Então f coincide com $P_1(x)$ no intervalo $[-3, 0]$ e coincide com $P_2(x)$ no intervalo $[0, 4]$. Você pode testar se é verdade ou falso usando `gnuplot`, mas isto será insuficiente como prova de se é verdade ou falso.

   (b) (V)[ ](F)[ ] Se a função $y = f(x)$ estiver definida pelas equações

$$\begin{cases} x \le 0 & a_{1,0} = P_1(-3); a_{1,1} = P_1'(-3); \frac{a_{1,2}}{2} = P_1''(-3); \\ x \le 0 & f(x) = a_{1,0} + a_{1,1}(x+3) + a_{1,2}(x+3)^2 \\ x > 0 & a_{2,0} = P_2(4); a_{2,1} = P_2'(4); \frac{a_{2,2}}{2} = P_2''(4); \frac{a_{2,3}}{3} = P_2^{(iv)}(4); \\ x \le 0 & f(x) = a_{2,0} + a_{2,1}(x-4) + a_{2,2}(x-4)^2 + a_{2,3}(x-4)^3 \end{cases} \qquad (15)$$

   Então f coincide com $P_1(x)$ no intervalo $[-3, 0]$ e coincide com $P_2(x)$ no intervalo $[0, 4]$. Você pode testar se é verdade ou falso usando `gnuplot`, mas isto será insuficiente como prova de se é verdade ou falso.

   (c) (V)[ ](F)[ ] Se a função $y = f(x)$ estiver definida pelas equações

$$\begin{cases} x \le 0 & a_{1,0} = P_1(-3); a_{1,1} = P_1'(-3); a_{1,2} = \frac{P_1''(-3)}{2}; \\ x \le 0 & f(x) = a_{1,0} + a_{1,1}(x+3) + a_{1,2}(x+3)^2 \\ x > 0 & a_{2,0} = P_2(4); a_{2,1} = P_2'(4); a_{2,2} = \frac{P_2''(4)}{2}; a_{2,3} = \frac{P_2'''(4)}{3}; \\ x \le 0 & f(x) = a_{2,0} + a_{2,1}(x-4) + a_{2,2}(x-4)^2 + a_{2,3}(x-4)^3 \end{cases} \qquad (16)$$

x_k	y_k	d_k
-7	-10	-70.65
0	0	-0.533
7	-6	0

Tabela 1: Dados lidos por sensor

Então f coincide com $P_1(x)$ no intervalo $[-3, 0]$ e coincide com $P_2(x)$ no intervalo $[0, 4]$. Você pode testar se é verdade ou falso usando `gnuplot`, mas isto será insuficiente como prova de se é verdade ou falso.

(d) (V)[ ](F)[ ] Colagem diferenciável com polinomios de grau 3 Considere a seguinte tabela de dados (obtidos por um sensor) em que $x_k \in [-7, 7]$, y_k é a medida colhida no ponto x_k e d_k é a taxa de variação (derivada) colhida no ponto x_k pelo sensor. É possível definir dois polinômios do terceiro grau, um no intervalo $[-7, 0]$,

$$P_1(x) = a_{1,0} + a_{1,1}(x+7) + a_{1,2}(x+7)^2 + a_{1,3}(x+7)^3$$

e outro no intervalo $[0, 7]$,

$$P_2(x) = a_{2,0} + a_{2,1}(x-7) + a_{2,2}(x-7)^2 + a_{2,3}(x-7)^3$$

de modo que eles fiquem colados, *diferenciavelmente* no ponto $x = 0$

$$P_1(0) = P_2(0); P_1'(0) = P_2'(0); P_1''(0) = P_2''(0);$$

definindo uma única função contínua e diferenciável no intervalo $[-7, 7]$.

Solução 1

$$P_1(x) = a_{1,0} + a_{1,1}(x+7) + a_{1,2}(x+7)^2 + a_{1,3}(x+7)^3 \quad (17)$$
$$P_1(-7) = -10 = a_{1,0}; P_1'(-7) = -70.65 = a_{1,1}; \quad (18)$$
$$P_1(0) = a_{1,0} + 7a_{1,1} + 7^2 a_{1,2} + 7^3 a_{1,3} = 0 = P_2(0) \quad (19)$$
$$P_1'(0) = a_{1,1} + 14a_{1,2} + 147a_{1,3} = 0 = P_2'(0) \quad (20)$$
$$-10 + 7 * -70.65 + 7^2 a_{1,2} + 7^3 a_{1,3} = 0 \quad (21)$$
$$a_{1,2} + 7a_{1,3} = (-10 + 7 * -70.65)/7^2 \quad (22)$$
$$a_{1,2} = (-10 + 7 * -70.65)/7^2 - 7a_{1,3} \quad (23)$$
$$a_{1,1} + 14a_{1,2} + 147a_{1,3} = 0 \quad (24)$$
$$-70.65 + 14a_{1,2} + 147a_{1,3} = 0 \quad (25)$$
$$a_{1,2} = (-147a_{1,3} + 70.65)/14 \quad (26)$$
$$a_{1,2} = -10.5a_{1,3} + 70.65/14 = (-10 + 7 * -70.65)/7^2 - 7a_{1,3} \quad (27)$$
$$17.5a_{1,3} = (-10 + 7 * -70.65)/7^2 - 70.65/14 \quad (28)$$
$$a_{1,3} = ((-10 + 7 * -70.65)/7^2 - 70.65/14)/17.5 \approx -0.87 \quad (29)$$
$$a_{1,2} = (-10 + 7 * -70.65)/7^2 - 7a_{1,3} \approx -4.15 \quad (30)$$
$$P_2(0) = a_{2,0} - 7a_{2,1} + 7^2 a_{2,2} - 7^3 a_{2,3} = 0 \quad (31)$$
$$P_2'(0) = a_{2,1} - 14a_{2,2} + 147a_{2,3} = -0.533 \quad (32)$$
$$P_2(7) = a_{2,0} = -6; P_2'(7) = a_{2,1} = 0 \quad (33)$$
$$-6 + 49a_{2,2} - 343a_{2,3} = 0; a_{2,2} = 6 + 343a_{2,3} \quad (34)$$
$$a_{2,1} - 14a_{2,2} + 147a_{2,3} = -0.533; \quad (35)$$
$$a_{2,2} = -(-0.533 - 147a_{2,3})/14 \quad (36)$$
$$-(-0.533 - 147a_{2,3})/14 = 6 + 343a_{2,3} \quad (37)$$
$$0.533/14 + 10.5a_{2,3} = 6 + 343a_{2,3} \quad (38)$$
$$(343 - 10.5)a_{2,3} = 0.533/14 - 6; a_{2,3} \approx -0.017 \quad (39)$$
$$a_{2,2} = -(-0.533 - 147a_{2,3})/14 \approx -0.15 \quad (40)$$
$$P_2(x) = -6 - 0.1502(x-7)^2 - 0.017(x-7)^3 \quad (41)$$

(e) (V)[ ](F)[ ] Colagem diferenciável com polinomios de grau 3 Considere a tabela de dados 5d, (obtidos por um sensor) em que $x_k \in [-7, 7]$, y_k é a medida colhida no ponto x_k e d_k é a taxa de variação (derivada) colhida no ponto x_k pelo sensor. É possível definir dois polinômios do terceiro grau, um no intervalo $[-7, 0]$,

$$P_1(x) = a_{1,0} + a_{1,1}(x+7) + a_{1,2}(x+7)^2 + a_{1,3}(x+7)^3$$

e outro no intervalo $[0, 7]$,

$$P_2(x) = a_{2,0} + a_{2,1}(x-7) + a_{2,2}(x-7)^2 + a_{2,3}(x-7)^3$$

de modo que eles fiquem colados, *diferenciavelmente* no ponto $x = 0$

$$P_1(0) = P_2(0); P_1'(0) = P_2'(0); P_1''(0) = P_2''(0);$$

definindo uma única função contínua e diferenciável no intervalo $[-7, 7]$.

Solução 2

$$P_1(x) = a_{1,0} + a_{1,1}(x+7) + a_{1,2}(x+7)^2 + a_{1,3}(x+7)^3 \quad (42)$$
$$P_1'(x) = a_{1,1} + 2a_{1,2}(x+7) + 3a_{1,3}(x+7)^2 \quad (43)$$
$$P_1(-7) = a_{1,0} = -10; P_1'(-7) = a_{1,1} = -70.65; \quad (44)$$
$$P_1(0) = a_{1,0} + 7a_{1,1} + 49a_{1,2} + 343a_{1,3} = 0 \quad (45)$$
$$P_1'(0) = a_{1,1} + 14a_{1,2} + 147a_{1,3} = -0.533 \quad (46)$$
$$P_1(0) = -10 + 7a_{1,1} + 49a_{1,2} + 343a_{1,3} = 0 \quad (47)$$
$$P_1'(0) = -70.65 + 14a_{1,2} + 147a_{1,3} = -0.533 \quad (48)$$
$$P_1(0) = 49a_{1,2} + 343a_{1,3} = 504.55 \quad (49)$$
$$P_1'(0) = (-70.65 + 14a_{1,2} + 147a_{1,3} = -0.533)3.5 \quad (50)$$
$$P_1(0) = 49a_{1,2} + 343a_{1,3} = 504.55 \quad (51)$$
$$P_1'(0) = -247.275 + 49a_{1,2} + 514.5a_{1,3} = -1.8655 \quad (52)$$
$$247.275 - 171.55a_{1,3} = 506.4155 \quad (53)$$
$$a_{1,3} = \frac{-(506.4155 - 247.275)}{171.55} \quad (54)$$
$$a_{1,0} = -10; a_{1,1} = -70.65; \quad (55)$$
$$49a_{1,2} + 343a_{1,3} = 504.55 \quad (56)$$
$$a_{1,2} = \frac{(504.55 - 343a_{1,3})}{49.0} \quad (57)$$
$$P_1(x) = a_{1,0} + a_{1,1}(x+7) + a_{1,2}(x+7)^2 + a_{1,3}(x+7)^3 \quad (58)$$
$$P_2(x) = a_{2,0} + a_{2,1}(x-7) + a_{2,2}(x-7)^2 + a_{2,3}(x-7)^3 \quad (59)$$
$$P_2'(x) = a_{2,1} + 2a_{2,2}(x-7) + 3a_{2,3}(x-7)^2 \quad (60)$$
$$P_2(0) = a_{2,0} - 7a_{2,1} + 49a_{2,2} - 343a_{2,3} = 0 \quad (61)$$
$$P_2'(0) = a_{2,1} - 14a_{2,2} + 147a_{2,3} = 0.533 \quad (62)$$
$$P_2(7) = a_{2,0} = -6; \quad (63)$$
$$P_2'(7) = a_{2,1} = 0 \quad (64)$$
$$a_{2,0} = -6; a_{2,1} = 0; \quad (65)$$
$$a_{2,0} - 7a_{2,1} + 49a_{2,2} - 343a_{2,3} = 0 \quad (66)$$
$$(a_{2,1} - 14a_{2,2} + 147a_{2,3} = 0.533) * 3.5 \quad (67)$$
$$a_{2,0} - 7a_{2,1} + 49a_{2,2} - 343a_{2,3} = 0 \quad (68)$$
$$3.5a_{2,1} - 49a_{2,2} + 514.5a_{2,3} = 1.8655 \quad (69)$$
$$a_{2,3} = \frac{(1.8655 - (a_{2,0} - 7a_{2,1} + 3.5a_{2,1}))}{514.5 - 343}; \quad (70)$$
$$a_{2,1} - 14a_{2,2} + 147a_{2,3} = 0.533 \quad (71)$$
$$a_{2,2} = \frac{-(0.533 - a_{2,1} - 147a_{2,3})}{14} \quad (72)$$
$$P_2(x) = a_{2,0} + a_{2,1}(x-7) + a_{2,2}(x-7)^2 + a_{2,3}(x-7)^3 \quad (73)$$
$$f(x) = if(x < 0)P_1(x); elseP_2(x); \quad (74)$$