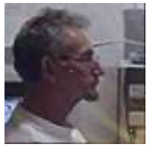

Calculo I	**Lista número 05**
Derivada do seno e do coseno	tarcisio.praciano@gmail.com
T. Praciano-Pereira	**Dep. de Computação**
alun@:	
Univ. Estadual Vale do Acaraú	26 de setembro de 2010
página da disciplina	www.calculo.sobralmatematica.org
Documento produzido com LATEX	sis. op. Debian/Gnu/Linux

0.1 Informações

Data da entrega da lista: dia 01 de Outubro, segunda-feira. Trabalhos em equipe, basta um único trabalho ser entregue e neste caso, no cabeçalho, devem estar os nomes completos de tod@s @s alun@s junto com os seus respectivos e-mails. Ao lado do nome o registro de pontos adquiridos. O número de membros de uma equipe não deve ultrapassar três. Preste atenção ao *nome do arquivo*.

Haverá possibilidade de adquirir pontos: mostrando-me erros na lista ou na página, um ponto por erro encontrado, esta lista tem um texto de apoio.

0.1.1 Objetivo

Funções funções trigonométricas e os números complexos. Derivada e integral das funções trigonométricas.

Nesta lista de exercícios vamos recuperar várias desigualdades trigonométricas com o objetivo de provar que

$$(sen(x))' = cos(x) \text{ e } (cos(x))' = -sen(x) \tag{1}$$

Em todas as questões desta lista a variável ρ representa o zero, representa uma sucessão que converge para zero, ou, ainda, sempre vou calcular o limite $\lim_{\rho=0}$

Palavras chave derivada do seno, derivada do coseno, fórmula de Euler, integral das funções trigonométricas, números complexos, relações trigonométricas, teorema do sanduiche.

0.2 Exercícios

1. Confira os cálculo algébricos

   (a) (V)[ ](F)[ ] Se $u = (2+3i), v = (3+2i)$ então
   $$u + v = (2+3i) + (3+2i) = 5 + 5i$$

   (b) (V)[ ](F)[ ] Se $u = (2+3i), v = (2+3i)$ então
   $$uv = (2+3i)(2+3i) \geq 0$$

   (c) (V)[ ](F)[ ] Se $u = (2+3i), v = (3+2i)$ então
   $$uv = (2+3i)(3+2i) = 13i$$
   não é positivo e nem é negativo, mas é o quadrado do número complexo $u = (2+3i)$. No conjunto dos números complexos não existem os conceitos "negativo" e "positivo", mas todo número complexo tem um inverso aditivo.

   (d) (V)[ ](F)[ ] $(a+bi) + (c+di) = a + c + (b+d)i$

   (e) (V)[ ](F)[ ] $(a+bi)(c+di) = (ac - bd) + (ad + bc)i$

2. Identifique as afirmações corretas

   (a) (V)[ ](F)[ ] $(2+3i)(3+2i) = 13i$

   (b) (V)[ ](F)[ ] $(2+3i)(2-3i) = 13$

   (c) (V)[ ](F)[ ] $i^2 = 1$

   (d) (V)[ ](F)[ ] $i^2 = -1$ é a própria definição do número complexo $\underline{i}$.

   (e) (V)[ ](F)[ ] $x^2 + 1 = \longrightarrow x = \pm i$ foi a equação que motivou a criação dos números complexos com a invenção do número complexo $\underline{i}$ para resolvê-la.

3. Identifique as afirmações corretas

   (a) (V)[ ](F)[ ] $|(2+3i)| = 13$

   (b) (V)[ ](F)[ ] $|(2+3i)| = \sqrt{13}$

   (c) (V)[ ](F)[ ] $(2+3i)\frac{2-3i}{13} = 1$

   (d) (V)[ ](F)[ ] $|(cos(\gamma) + isen(\gamma)| = 2$

   (e) (V)[ ](F)[ ] $|(cos(\gamma) + isen(\gamma)| = 1$, porque o número complexo
   $$z = (cos(\gamma) + isen(\gamma)$$
   se encontra sobre o círculo trigonométrico, um círculo de raio 1.

4. Identifique as afirmações corretas

   (a) (V)[ ](F)[ ] Para qualquer arco α, $|(cos(\alpha) + isen(\alpha)| = 1$

   (b) (V)[ ](F)[ ] $(2+3i)(2-3i) = \sqrt{13}$

   (c) (V)[ ](F)[ ] $(2+3i)(2-3i) = 13$

   (d) (V)[ ](F)[ ] $cos^2(\alpha) + sin^2(\alpha) = 0$

   (e) (V)[ ](F)[ ] $cos^2(\alpha) + sin^2(\alpha) = 1$

5. Conjugado e inverso

   (a) (V)[ ](F)[ ] Se$z = a + bi$ e $w = a - bi$ então $w = \overline{z}$, se chama de conjugado de z e
   $$zw = a^2 + b^2 = |z|^2$$

   (b) (V)[ ](F)[ ] Se $z \neq 0$ então $\frac{z\overline{z}}{|z^2|} = 1$ de onde se pode deduzir que $\frac{1}{z} = \frac{\overline{z}}{|z^2|}$ O programa *calculadora* calcula o inverso de um número complexo e mostra graficamente $z, \frac{1}{z}$.

(c) (V)[ ](F)[ ] Se z, w forem dois números complexos então

$$\overline{(zw)} = \overline{z}\overline{w}$$

o *produto dos conjugados* é o *conjugado do produto.* Leia na página a respeito.

(d) (V)[ ](F)[ ] Se $(2+3i)z + (4-7i) = 10+3i$ então $z \approx -39.0769 + 25.5385i$

(e) (V)[ ](F)[ ] Se $(2+3i)z + (4-7i) = 10+3i$ então $z = \frac{(10+3i-(4-7i))}{2+3i}$

6. Notação de Euler:

$$cos(\gamma) + isen(\gamma) = e^{i\gamma} \tag{2}$$

Selecione alguns valores para α, γ e represente geometricamente

$$e^{i\gamma} = (cos(\gamma) + isen(\gamma) \tag{3}$$
$$e^{i\alpha} = (cos(\alpha) + isen(\alpha)) \tag{4}$$
$$e^{-i\gamma} = (cos(-\gamma) + isen(-\gamma) \tag{5}$$

O produto dos números complexos $e^{i\gamma}$, $e^{i\alpha}$ é

(a) (V)[ ](F)[ ] $e^{i(\gamma+\alpha)} = cos(\gamma)sen(\gamma) + icos(\alpha)sen(\alpha)$

(b) (V)[ ](F)[ ] $e^{i(\gamma+\alpha)} = cos(\gamma)cos(\alpha) - sen(\gamma)sen(\alpha)$

(c) (V)[ ](F)[ ]

$$e^{i(\gamma+\alpha)} =$$
$$= \cos(\gamma)\cos(\alpha) - \sin(\gamma)\sin(\alpha) + i\left[\cos(\gamma)\sin(\alpha) + \sin(\gamma)\cos(\alpha)\right] =$$
$$= \cos(\gamma+\alpha) + i\sin(\gamma+\alpha)$$

(d) (V)[ ](F)[ ]

$$\Delta_\rho(exp)(ix) = exp(i(x+\rho)) - exp(ix) \tag{6}$$
$$Q_\rho(exp)(ix) = exp(i\rho) = \cos(\rho) + i\sin(\rho) \tag{7}$$

(e) (V)[ ](F)[ ]

$$\Delta_\rho(exp)(ix) = e^{i(x+\rho)} - e^{ix} = e^{ix}e^{i\rho} - e^{ix} = e^{ix}(e^{i\rho} - 1) \tag{8}$$
$$Q_\rho(exp)(ix) = e^{ix}\frac{e^{i\rho}-1}{\rho} \tag{9}$$
$$Q_\rho(exp)(ix) = e^{ix}\left(\frac{\cos(\rho)-1}{\rho} + i\frac{\sin(\rho)}{\rho}\right) \tag{10}$$

7. A derivada do seno A figura (1) página 6, apresenta-lhe o *círculo trigonométrico*

(a) (V)[ ](F)[ ] O operador quociente e seno. Para pequenos valores de ρ é verdade

$$Q_\rho(sin)(x) = \frac{sin(x+\rho) - sin(x)}{\rho}$$
$$Q_\rho(sin)(x) = \frac{sin(x)cos(\rho) + sin(\rho)cos(x) - sin(x)}{\rho}$$
$$Q_\rho(sin)(x) = \frac{sin(x)(cos(\rho)-1) + sin(\rho)cos(x)}{\rho}$$
$$Q_\rho(sin)(x) = \frac{sin(x)(cos(\rho)-1)}{\rho} + \frac{sin(\rho)cos(x)}{\rho}$$
$$Q_\rho(sin)(x) = sin(x)\frac{(cos(\rho)-1)}{\rho} + \frac{sin(\rho)}{\rho}cos(x)$$

(b) (V)[ ](F)[ ] Se admitirmos a hipótese de que as funções *seno* e *coseno* são contínuas e deriváveis na origem, então os cálculos no item anterior nos conduzem a

$$\frac{sin(\rho)}{\rho} = \frac{sin(0+\rho) - sin(0)}{\rho} =$$
$$Q_\rho(sin)(0) = \frac{sin(\rho)}{\rho} \to sin'(0)$$
$$\frac{(cos(\rho)-1)}{\rho} = \frac{(cos(0+\rho) - cos(0))}{\rho} =$$
$$Q_\rho(cos)(0) = \frac{(cos(0+\rho) - cos(0))}{\rho} \to cos'(0)$$

mas nós ainda não sabemos quanto vale $sin'(0)$ e $cos'(0) = 0$ porque $cos(x)$ é uma função par, derivável, o ponto zero é um ponto de máximo onde há uma tangente horizontal.

(c) (V)[ ](F)[ ] Usando o teorema do sanduiche para calcular a derivada do seno em zero. Podemos verificar, examinando o círculo trigonométrico, na figura (1), página 6, que para pequenos valores do ângulo ρ é verdade que

$$\frac{\sin(\rho)}{\tan(\rho)} = \frac{\sin(\rho)\sin(\rho)}{\cos(\rho)} < \frac{\sin(\rho)}{\cos(\rho)} < \frac{\sin(\rho)}{\rho} < \frac{\rho}{\rho}$$
$$\frac{1}{\cos(\rho)} < \frac{\sin(\rho)}{\tan(\rho)} = \frac{\sin(\rho)\sin(\rho)}{\cos(\rho)}$$
$$\frac{1}{\cos(\rho)} < \frac{\sin(\rho)}{\rho} = Q_\rho(sin)(0) < \frac{\rho}{\rho}$$

E como $\frac{sin(\rho)}{tg(\rho)} = \frac{1}{cos(\rho)}$ é uma função contínua[1] numa vizinhança de zero (quando ρ for pequeno), então, pelo Teorema do Sanduiche,

$$sin'(0) = \lim_{\rho=0} Q_\rho(sin)(0) = \frac{1}{cos(0)} = 1$$

[1] A importância deste conceito teórico, a *continuidade*! Ele entra em pontos chave de demonstrações.

(d) (V)[ ](F)[ ] Derivada do seno.

$$
\begin{aligned}
Q_\rho(sin)(x) &= \tfrac{sin(x+\rho)-sin(x)}{\rho} = \\
&= \tfrac{sin(x)cos(\rho)-sin(\rho)cos(x)-sin(x)}{\rho} = \\
&= \tfrac{sin(x)(cos(\rho)-1)-sin(\rho)cos(x)}{\rho} = \\
&= sin(x)\tfrac{cos(\rho)-1}{\rho} - \tfrac{sin(\rho)}{\rho}cos(x) \\
&= sin(x)Q_\rho(cos)(0) - \tfrac{sin(\rho)}{\rho}cos(x) \\
\lim_{\rho=0} Q_\rho(sin)(x) &= sin'(x) = cos(x)
\end{aligned}
$$

(e) (V)[ ](F)[ ] A derivada do coseno.

$$Q_\rho(cos)(x) = \tfrac{cos(x+\rho)-cos(x)}{\rho} = \tag{11}$$

$$= \tfrac{cos(x)cos(\rho)-sin(x)sin(\rho)-cos(x)}{\rho} = \tag{12}$$

$$= \tfrac{cos(x)(cos(\rho)-1)-sin(x)sin(\rho)}{\rho} = \tag{13}$$

$$= cos(x)\tfrac{cos(\rho)-1}{\rho} - sin(x)\tfrac{sin(\rho)}{\rho} \tag{14}$$

$$= cos(x)Q_\rho(cos)(0) - sin(x)\tfrac{sin(\rho)}{\rho} \tag{15}$$

$$= cos(x)Q_\rho(cos)(0) - sin(x)Q_\rho(\sin)(0) \tag{16}$$

Já vimos que $\lim\limits_{\rho=0} Q_\rho(\sin)(0) = 1 = \sin'(0)$, usado na equação (16), e

- sabendo que *coseno* é uma função par
- assumindo a hipótese que *coseno* seja diferenciável;

então $\lim\limits_{\rho=0} Q_\rho(\cos)(0) = 0$ e concluímos que

$$(\cos x)' = \lim_{\rho=0} Q_\rho(cos)(x) = -sin(x) \tag{17}$$

$$(\cos x)' = -sin(x) \tag{18}$$

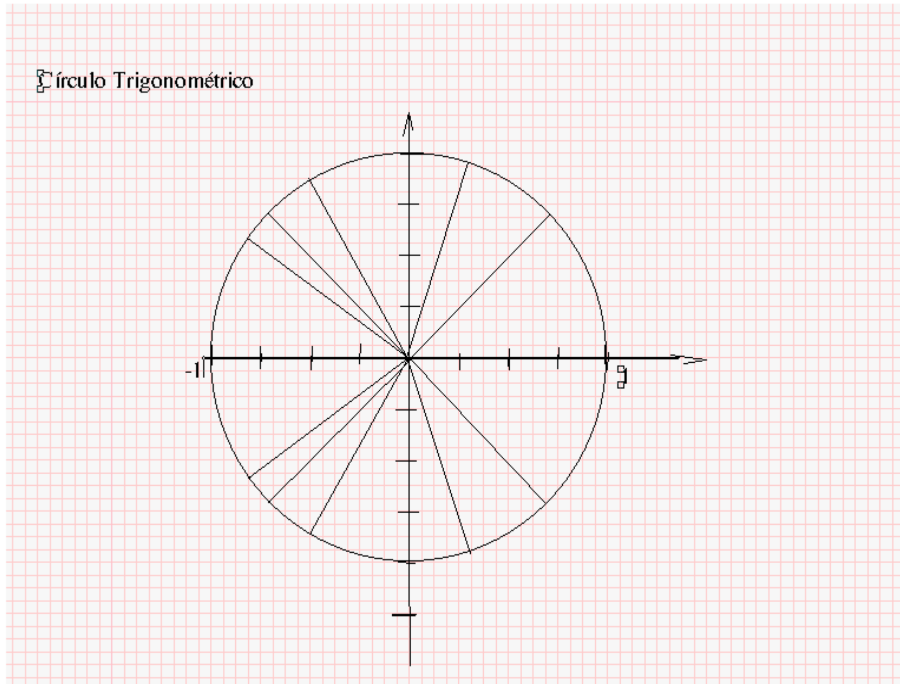

Figura 1: Círculo Trigonométrico