Cálculo I — **Lista número 02**, 23 de agosto de 2010

Integração geométrica — **tarcisio.praciano@gmail.com**

prof. T. Praciano-Pereira — **Dep. de Computação** UeVA

alun@:

www.calculo.sobralmatematica.org

Documento produzido com LaTeX — sis. op. Debian/Gnu/Linux

Data da entrega da lista: dia 30 de Agosto, segunda-feira.

0.0.1 Objetivo

Entender e calcular integrais de funções polinômiais.

<u>**Palavras chave**</u> cálculo aproximado da integral, funções definidas com a integral, integral de funções polinomiais, integral definida, integral indefinida.

Indução finita

Algumas fórmulas que podem ser provadas com indução finita.

$$1 + 2 + \cdots + n = \frac{n+1}{2}n \tag{1}$$

$$1 + 4 + \cdots n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \tag{2}$$

$$\sum_{k=1}^{n} k^3 = (1 + 2 + \cdots + n)^2 \tag{3}$$

$$\sum_{k=1}^{n} k^3 = (\frac{n+1}{2}n)^2 = \frac{(n+1)^2 n^2}{4} \tag{4}$$

$$\sum_{k=0}^{n-1} k^4 = \frac{6n^5 - 15n^4 + 10n^3 - n}{30} \tag{5}$$

$$\sum_{k=0}^{n-1} k^5 = \frac{2n^6 - 6n^5 + 5n^4 - n^2}{12} \tag{6}$$

Vou precisar destas fórmulas no cálculo de integrais de funções polinomais.

0.1 Exercícios

1. <u>Problema do corpo em queda livre</u> Faça os gráficos que for possível para auxiliá-l@ no entendimento das questões, $\underline{g}$ é a aceleração da gravidade que vou supor constante (falso!) é um número negativo.

   (a) <u>(V)[ ](F)[ ]</u> Se $v(t) = g(t-c) + s_0; s_0 > 0$ é a equação da velocidade de um corpo em queda livre, solto de uma altura s_0 que vai encontrar o solo (violentamente) no ponto $x = c - \frac{s_0}{g}$

   (b) <u>(V)[ ](F)[ ]</u> Se $v(t) = g(t-c) + v_0; v(c) = v_0 > 0; g < 0$ é a equação da velocidade de um corpo em queda livre, lançado de uma plataforma, à uma certa altura, com a velocidade inicial v_0 que vai encontrar o solo (violentamente) quando $t = c - \frac{v_0}{g}$. O gráfico de tempo contra velocidade é o que se encontra na figura (1) página 2,

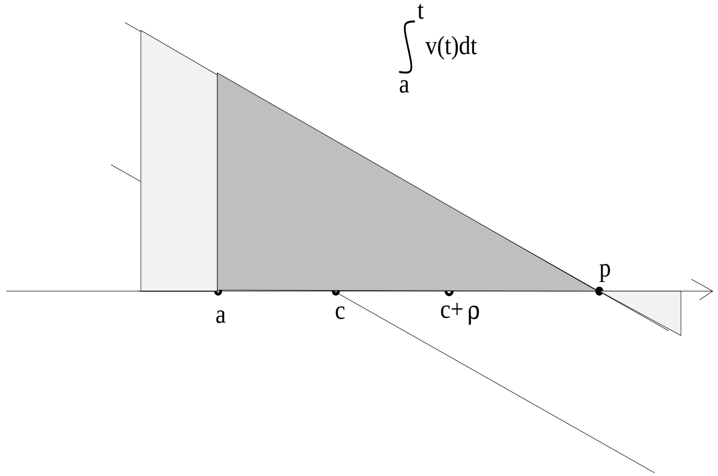

Figura 1: Corpo em queda livre com velocidade inicial

   (c) <u>(V)[ ](s)[ ]</u> Se $v(t) = g(t-c); +v_0; v(c) = v_0 > 0; g < 0$

$$s_a(t) = \int_a^t v(t)dt;\ \text{condição inicial } a;$$

   é uma função do segundo grau que descreve o lançamento de um corpo para o alto, de uma plataforma de lançamento, no instante $t = a$. Valem as equações

$$s_a(a) = 0 \tag{7}$$

$$a < c;\ \rho = c - a;\ \Rightarrow\ \{t \in [c-\rho, c+\rho]\ \Rightarrow\ s_a(t) \ge 0;\}; \tag{8}$$

$$a < c; \rho = c - a\ \Rightarrow\ \{t \notin [c-\rho, c+\rho]\ \Rightarrow\ s_a(t) < 0;\}; \tag{9}$$

   No ponto $\underline{t = p}$, ver o gráfico 1, o corpo encontra o solo violentamente. As informações desta questão lhe permitem fazer o gráfico e encontrar a equação $y = V(t) = s_a(t)$.

   (d) <u>(V)[ ](s)[ ]</u> Se $v(t) = g(t-c); +v_0; v(c) = v_0 > 0; g < 0$

$$s_a(t) = \int_a^t v(t)dt;\ \text{condição inicial } a;$$

é uma função do segundo grau que descreve o lançamento de um corpo para o alto, de uma plataforma de lançamento, no instante $t = a$. Valem as equações

$$s_a(a) = 0 \tag{10}$$
$$a < c;\ \rho = c - a;\ \Rightarrow\ \{t \in [c-\rho, c+\rho]\ \Rightarrow\ s_a(t) \geq 0;\}; \tag{11}$$
$$a < c; \rho = c - a\ \Rightarrow\ \{t > c+\rho]\ \Rightarrow\ s_a(t) < 0;\}; \tag{12}$$

Em ponto *posterior* ao ao ponto $t = p$, ver o gráfico 1, o corpo encontra o solo violentamente. As informações desta questão lhe permitem fazer o gráfico e encontrar a equação $y = V(t) = s_a(t)$.

(e) (V)[ ](s)[ ] Se $v(t) = g(t-c); +v_0; v(c) = v_0 > 0; g < 0$

$$s_a(t) = \int_a^t v(t)dt;\ \text{condição inicial } a;$$

é uma função do segundo grau que descreve o lançamento de um corpo para o alto, de uma plataforma de lançamento, no instante $t = a$ e valem as equações

$$s_a(t) = \int_a^t v(t)dt = \int_a^t g(t-c)dt; \tag{13}$$
$$s_a(t) = \frac{v(a)+v(t)}{2}(t-a) = \frac{g(a-c)+v_0+g(t-c)+v_0}{2}(t-a); \tag{14}$$
$$\frac{1}{2}gt^2 - \frac{1}{2}ga^2 - gct + v_0tgca - v_0a; \tag{15}$$
$$s_a(t) = \frac{1}{2}gt^2v_1t + s_0; \tag{16}$$
$$\begin{cases} v_1 = v_0 - gc; \\ s_0 = gca - v_0a; \end{cases} \tag{17}$$

2. Integral de funções polinomiais Escreva a soma de Riemann correspondente e verifique se o *limite* está correto.

   (a) (V)[ ](F)[ ] $\int_0^a xdx = F(a) = \frac{a^2}{2};$

   (b) (V)[ ](F)[ ] $\int_0^a x^2dx = F(a) = \frac{a^4}{4};$

   (c) (V)[ ](F)[ ] $\int_0^a x^2dx = F(a) = \frac{a^3}{3};$

   (d) (V)[ ](F)[ ] $\int_0^a x^3dx = F(a) = \frac{a^5}{6};$

   (e) (V)[ ](F)[ ] $\int_0^a x^3dx = F(a) = \frac{a^4}{4};$

3. Propriedades das integrais de funções polinomiais Suponha que seja conhecida a a fórmula $\int_0^a f(t)dt = F(a)$, em que F se chama uma primitiva de f. Na questão anterior descobrimos as primtivas de $f(x) \in \{x, x^2, x^3\}$. Decida se é verdade:

   (a) (V)[ ](F)[ ] $\int_a^0 f(t)dt = F(a)$

   (b) (V)[ ](F)[ ] $\int_a^0 f(t)dt = -F(a)$

   (c) (V)[ ](F)[ ] Se forem dados os números reais a, b num domínio onde a integral exista (como área) e se $a < b$ então

   $$\int_a^b f(t)dt = \int_0^b f(t)dt - \int_0^a f(t)dt = F(b) - F(a)$$

   (d) (V)[ ](F)[ ] $\int_a^b t^2dt = \frac{b^2}{2} - \frac{a^2}{2}$

   (e) (V)[ ](F)[ ] $\int_a^b t^2dt = \frac{b^3}{3} - \frac{a^3}{3}$

4. Integral de funções polinomiais Suponha que duas funções polinomiais, f, g sejam integráveis no intervalo $[a, b]$

   (a) (V)[ ](F)[ ] As somas de Riemann mostram que $\int_a^b (f(t)+g(t))dt = \left(\int_a^b f(t)dt\right)\left(\int_a^b g(t)dt\right)$

   (b) (V)[ ](F)[ ] As somas de Riemann mostram que $\int_a^b (f(t)+g(t))dt = \int_a^b f(t)dt + \int_a^b g(t)dt$

   (c) (V)[ ](F)[ ] Se ρ for uma constante (um número real) então as somas de Riemann mostram que $\int_a^b \rho f(t)dt = \rho \int_a^b f(t)dt$

   (d) (V)[ ](F)[ ] $\int_a^b 1 + 2x - 3x^2dx = \int_a^b 1dx + 2\int_a^b xdx + 3\int_a^b x^2dx$

   (e) (V)[ ](F)[ ] $\int_{-10}^{10} x^2 - 3x^4dx = \frac{5000}{3}$