Cálculo I — **Lista número 11**
Fórmula de Taylor — tarcisio@member.ams.org
T. Praciano-Pereira — **Dep. de Computação**

alun@:

Univ. Estadual Vale do Acaraú	4 de maio de 2010
página da disciplina	www.calculo.sobralmatematica.org
Documento produzido com LaTeX	sis. op. Debian/Gnu/Linux

0.1 Informações

Por favor, para entrega desta lista, em papel, prenda esta *folha de rosto* na solução, preenchendo com os seus dados, ela será usada na correção. Se você quiser entregar o trabalho eletrônicamente, envie o arquivo para o meu e-mail ou entregue em CD na secretária do Curso de Computação. Por favor , siga as instruções sobre nomes de arquivos, leia as intruções na página da disciplina. Se o trabalho for feito em equipe, basta um único trabalho ser entregue e neste caso, no cabeçalho, devem estar os nomes completos de tod@s @s alun@s junto com os seus respectivos e-mails. O número de membros de uma equipe não deve ultrapassar três.

Data da entrega da lista: segunda-feira, 10 de maio.

0.1.1 Objetivo

Revisão dos tópicos ja estudados, aplicação da derivada, aplicação na Física (Mecânica).

Palavras chave: Fórmula de Taylor, limite, continuidade, contas, derivada, gráficos, velocidade, aceleração.

0.1.2 Avaliação do trabalho

Leia na página da disciplina a este respeito. Acrescente as questões sobre avaliação do trabalho do professor.

0.2 Exercícios

1. Fórmula de Taylor de $y = e^x$
   (a) (V)[ ](F)[ ] A reta tangente ao gráfico de $y = e^x$ em $(0,1)$ é $y = 1 + x$
   (b) (V)[ ](F)[ ] A função do segundo grau tangente ao gráfico de $y = e^x$ em $(0,1)$ é $y = 1 + x + x^2$
   (c) (V)[ ](F)[ ] A função do terceiro grau tangente ao gráfico de $y = e^x$ em $(0,1)$ é $y = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!}$
   (d) (V)[ ](F)[ ] A função polinomial do grau n tangente ao gráfico de $y = e^x$ em $(0,1)$ é
   $$y = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots \frac{x^n}{n!}$$

   (e) (V)[ ](F)[ ] Um valor aproximado para o número e pode ser obtido com a fórmula de Taylor
   $$e = e^1 \approx 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots \frac{1}{n!}$$
   O programa `exer11_01.calc` calcula este valor para qualquer valor de n que você desejar. Para $n = 20$ obtive $e \approx 2.71828182845904523534 93$;

2. A Física *define velocidade* como a *derivada da equação da distância* (deslocamento), em outras palavras, se $y = s(t)$ for a equação do *deslocamento* de um corpo, ao longo do tempo, então $y = s'(t)$ descreve a *velocidade* deste corpo no ponto t.
   (a) (V)[ ](F)[ ] Se $y = s(t) = at^2 + bt + c$ for a equação do movimento (deslocamento) de um corpo, então a sua velocidade no ponto t será $y' = s'(t) = 2a + bt$
   (b) (V)[ ](F)[ ] Se $y = s(t) = at^2 + bt + c$ for a equação do movimento (deslocamento) de um corpo, então a sua velocidade no ponto t será $y' = s'(t) = 2at + b$
   (c) (V)[ ](F)[ ] Como a "aceleração" é a derivada da velocidade, então Se $y = s(t) = at^2 + bt + c$ for a equação do movimento (deslocamento) de um corpo, então a velocidade no ponto $\underline{t}$ será $s'(t) = 2at + b$ e a aceleração no ponto $\underline{t}$ será $y'' = f''(t) = b$, uma constante.
   (d) (V)[ ](F)[ ] Como a "aceleração" é a derivada da velocidade, então Se $y = s(t) = at^2 + bt + c$ for a equação do movimento (deslocamento) de um corpo, então a velocidade no ponto $\underline{t}$ será $s'(t) = 2at + b$ e a aceleração no ponto $\underline{t}$ será $y'' = f''(t) = 2a$, uma constante.
   (e) (V)[ ](F)[ ] - O movimento em queda livre. Se for verdade que um corpo em queda livre tem o seu deslocamente descrito por uma parábola, então a aceleração da gravidade é uma constante (a única força atuando sobre o corpo em queda livre é a atração da gravidade - desprezado o atrito com o ar). A aceleração é a segunda derivada da equação do deslocamento. Mas é falso que possa haver movimento em queda livre!

3. A função de Fibonacci é uma sucessão *recursiva* definida pelas equações:
   $$\begin{cases} s_0 = 0 \\ s_1 = 1 \\ n \geq 2 \;\; \Rightarrow \;\; s_n = s_{n-1} + s_{n-2} \end{cases} \tag{1}$$
   (a) (V)[ ](F)[ ] $s_3 = 4$
   (b) (V)[ ](F)[ ] $s_3 = 2$
   (c) (V)[ ](F)[ ] $s_5 = 6$

(d) (V)[ ](F)[ ] $s_5 = 5$

(e) (V)[ ](F)[ ] $s_{10} = 55$

4. Indução finita e lógica [1] Uma função definida sobre o conjunto $\mathbf{R}$ tem a propriedade

$$\forall x, y \in \mathbf{R};\ f(x+y) + f(x-y) = 2f(x)f(y) \tag{2}$$

(a) (V)[ ](F)[ ] $f(0) \in \{0, 1\}$

(b) (V)[ ](F)[ ] Se $f(0) = 1$ então $f(-y) = f(y)$ e f é uma função "par".

(c) (V)[ ](F)[ ] Se $f(0) = 0$ então $f(-y) = -f(y)$ e f é uma função "impar".

(d) (V)[ ](F)[ ] Conhecido $f(a)$ podemos calcular $f(na)$ para qualquer inteiro positivo $\underline{n}$.

(e) (V)[ ](F)[ ] Conhecido $f(a)$ podemos calcular $f(-a)$ assim podemos calcular $f(na)$ para qualquer inteiro.

5. Na figura (1) página 3, temos a equação da velocidade, $y = v(t)$ de um

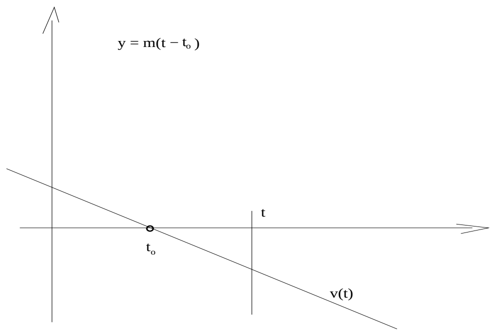

Figura 1: equaçao da velocidade

corpo ao longo do tempo.

(a) (V)[ ](F)[ ] A área limitada pelo gráfico de $y = v(t)$ e pelo eixo do tempo, Ot, entre os "instantes" $\underline{t_0}$ e $\underline{t}$ é $\int_{t_0}^{t} v(t)dt = \underbrace{\frac{v(t)}{2}(t-t_0)}$, *uma*

[1]Modificada usando uma questão do livro *Analyse*, autores *Raymond Couty* e *Jazcques Ezra*, collection U, editora Armand Colin, 1965 - página 128.

função do segundo grau

$$\int_{t_0}^{t} v(t)dt = s(t) = \frac{m}{2}(t-t_0)^2$$

para alguma constante $\underline{m > 0}$, de acordo com o gráfico.

(b) (V)[ ](F)[ ] A área limitada pelo gráfico de $y = v(t)$ e pelo eixo do tempo, Ot, entre os "instantes" $\underline{t_0}$ e $\underline{t}$ é $\int_{t_0}^{t} v(t)dt = \underbrace{\frac{v(t)}{2}(t-t_0)}$, *a função do segundo grau*

$$\int_{t_0}^{t} v(t)dt = s(t) = \frac{m}{2}(t-t_0)^2$$

para alguma constante $\underline{m < 0}$, de acordo com o gráfico.

(c) (V)[ ](F)[ ] Considere a equação da distância percorrida pelo corpo com a velocidade descrita na figura (1). Aceite o tempo "anterior" a t_0. Para todo tempo $t_1 > t_0$ existe um tempo $t_{-1} < t_0$ tal que

$$s(t_{-1}) = \int_{t_0}^{t_{-1}} v(t)dt = -s(t_1)$$

a distância percorrida de t_0 até t_{-1} é igual, em módulo a distância percorrida de t_0 até t_1, mas de sinal contrário, (uma delas é negativa).

(d) (V)[ ](F)[ ] Considere a equação da distância percorrida pelo corpo com a velocidade descrita na figura (1). Aceite o tempo "anterior" a t_0. Para todo tempo $t_1 > t_0$ existe um tempo $t_{-1} < t_0$ tal que

$$s(t_{-1}) = \int_{t_0}^{t_{-1}} v(t)dt = s(t_1) = \int_{t_0}^{t_1} v(t)dt;$$

A distância total percorrida no intervalo $[t_{-1}, t_1]$ é $\int_{t_0}^{t_{-1}} v(t)dt = 0$.

(e) (V)[ ](F)[ ] Na figura (2) página 5, podemos ver os gráficos da *aceleração*, da *velocidade* e do *deslocamento* de um corpo como função do tempo.

(f) (V)[ ](F)[ ] Na figura (3) página 6, podemos ver os gráficos da *aceleração*, da *velocidade* e do *deslocamento* de um corpo como função do tempo.

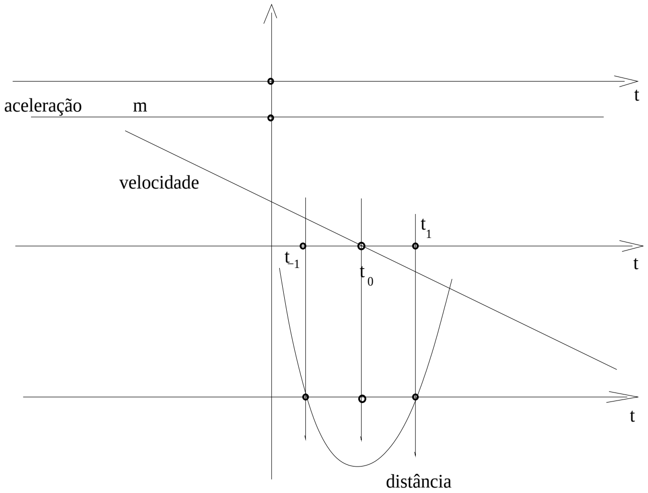

Figura 2: Três gráficos sincronizados: aceleração, velocidade e distância

6. Corpo em queda livre
   (a) (V)[ ](F)[ ] Na figura (3), no ponto t_0 a velocidade é máxima.
   (b) (V)[ ](F)[ ] Na figura (3), no ponto t_0 a velocidade é zero.
   (c) (V)[ ](F)[ ] Na figura (3), no ponto t_0 como a velocidade é zero este é um ponto de mínimo para a distância percorrida.
   (d) (V)[ ](F)[ ] Na figura (3), o ponto t_0 descreve o que podemos ver, quando um corpo é lançado para o alto, instantaneamente para, antes de começar a descer. É o ponto de máximo da distância percorrida, neste ponto a velocidade é zero.
   (e) (V)[ ](F)[ ] Na figura (3), a aceleração $\underline{m}$ é constante e positiva.
7. Derivadas
   (a) (V)[ ](F)[ ] $f(x) = x^4 \sin(x)\cos(x)$ entao

$$f'(x) = 2x^3 \sin(2x) + x^4 \cos(2x)$$

   (b) (V)[ ](F)[ ] $f(x) = \frac{x^2+3x+1}{x^4+x^2+1}$ então $f'(x) = \frac{(2x+3)(x^4+x^2+1)-(x^2+3x+1)(4x^3+2x)}{(x^4+x^2+1)^2}$ e tanto f como f' estão definidas e são contínuas na reta inteira.

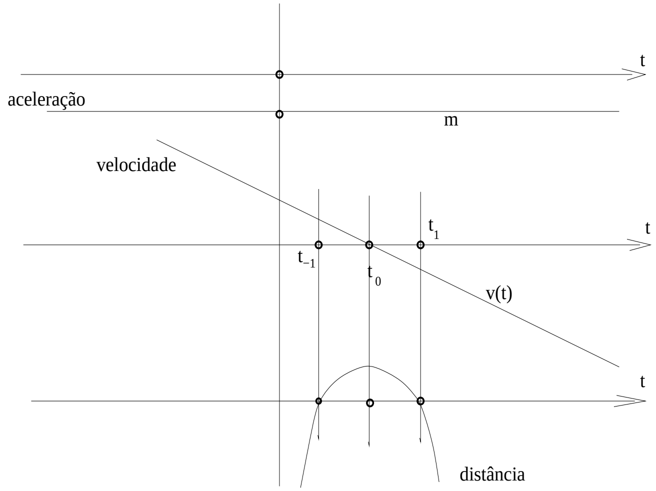

Figura 3: Três gráficos sincronizados: aceleração, velocidade e distância

   (c) (V)[ ](F)[ ] $f(x) = \frac{1}{1+sin^2(x)}$ então $f'(x) = \frac{\sin(2x)}{(1+sin^2(x))^2}$ e tanto f como f' estão definidas e são contínuas na reta inteira.
   (d) (V)[ ](F)[ ] $f(x) = e^{ix}$ em que i é a constante imaginária, $i^2 = -1$. Então

$$\begin{cases} f'(x) = if(x) = f_1(x); \\ f''(x) = -f(x) = f_2(x); \\ f'''(x) = -if(x) = f_3(x); \\ f^{(iv)}(x) = f(x) = f_4(x) \\ \dots \\ f^{(n+i)}(x) = f_i(x) \end{cases} \tag{3}$$

   (e) (V)[ ](F)[ ] - Fórmula de Euler $f(x) = \cos(x) + i\sin(x)$ em que i é a constante imaginária, $i^2 = -1$. Então

$$\begin{cases} f'(x) = if(x) = f_1(x); \\ f''(x) = -f(x) = f_2(x); \\ ]f'''(x) = -if(x) = f_3(x); \\ f^{(iv)}(x) = f(x) = f_4(x) \\ \dots \\ f^{(n+i)}(x) = f_i(x) \end{cases} \tag{4}$$

   demonstrando assim a famosa *fórmula* de Euler.

8. Leia os gráficos para decidir se a questão é verdadeira (ou falsa).

(a) (V)[ ](F)[ ] Na figura (4) podemos ver os gráficos de f e f' restritos

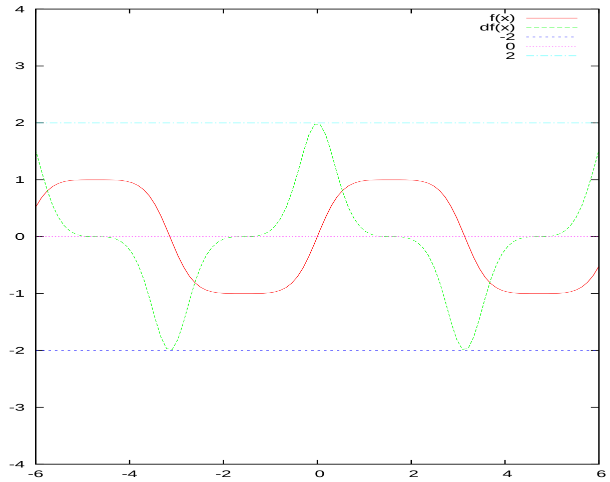

Figura 4: f e f'

ao intervalo $[-6,6]$ com $f(x) = \frac{2sin(x)}{1+sin^2(x)}$

(b) (V)[ ](F)[ ] Na figura (4) podemos ver os gráficos de f e f' restritos ao intervalo $[-6,6]$ com $f(x) = \frac{1}{1+sin^2(x)}$

(c) (V)[ ](F)[ ] Na figura (5) podemos ver o gráfico da reta tangente ao gráfico de $f(x) = \frac{1}{1+\sin^2(x)}$ no ponto $(a, f(a))$ com $a \in \{-3, 3\}$.

(d) (V)[ ](F)[ ] Na figura (5) podemos ver o gráfico das retas tangentes ao gráfico de $f(x) = \frac{2sin(x)}{1+sin^2(x)}$ no ponto $(a, f(a))$ com $a \in \{-3, 3\}$.

(e) (V)[ ](F)[ ] A equação da reta tangente ao gráfico de $y = f(x)$ no ponto $(a, f(a))$ é $y = f'(a) + f(a)(x - a)$.

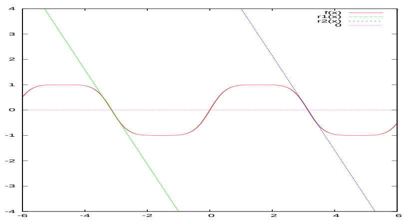

Figura 5: Gráfico de $f(x)$