Cálculo I	**Lista número 10**
Logaritmo e exponencial	tarcisio@member.ams.org
T. Praciano-Pereira	**Dep. de Computação**

alun@:

Univ. Estadual Vale do Acaraú	26 de abril de 2010
página da disciplina	www.calculo.sobralmatematica.org
Documento produzido com LaTeX	sis. op. Debian/Gnu/Linux

0.1 Informações

0.1.1 Objetivo

Vou mostrar-lhe uma função cuja integral não pode ser calculada com o `Teorema Fundamental do Cálculo` porque a função não tem uma primitiva que possa ser expressa em termos de outras funções conhecidas. Em outras palavras, a primitiva é uma nova função, a função `logaritmo`. Em suma, a única forma de calcular esta integral é *aproximadamente*.

Você já conhece `logaritmo` desde o Ensino Médio porém a metodologia que vou empregar aqui é própria do Curso de Cálculo. O que é *surpreendente* é a quantidade de instrumentos teóricos que vamos usar para atingir este objetivo.

Palavras chave logaritmo, exponencial, função inversa, integração aproximada.

0.2 Exercícios

1. Propriedades da função $f(x) = \frac{1}{x}$

   (a) (V)[ ](F)[ ] O domínio de $f(x) = \frac{1}{x}$ é o conjunto dos números reais positivos.

   (b) (V)[ ](F)[ ] O domínio de $f(x) = \frac{1}{x}$ é o conjunto de todos os números reais exceto o zero, $\mathbf{R} - \{0\}$.

   (c) (V)[ ](F)[ ] A derivada da função $f(x) = \frac{1}{x}$ é positiva e ela é uma função crescente.

   (d) (V)[ ](F)[ ] A derivada da função $f(x) = \frac{1}{x}$ é negativa e ela é uma função decrescente.

   (e) (V)[ ](F)[ ] Para grandes valores de $|x|$ $f(x) = \frac{1}{x}$ é arbitrariamente pequena e porisso dizemos que $\lim_{x=\pm\infty} f(x) = 0$.

2. Gráfico da função $f(x) = \frac{1}{x}$

   (a) (V)[ ](F)[ ] A função $y = f(x) = \frac{1}{x}$ é uma função par, quer dizer, $f(-x) = f(x)$.

   (b) (V)[ ](F)[ ] A função $y = f(x) = \frac{1}{x}$ é uma função impar, quer dizer, $f(-x) = -f(x)$.

   (c) (V)[ ](F)[ ] Para $y = f(x) = \frac{1}{x}$, se $x > 0$ então $f\frac{1}{x} = \frac{1}{f(x)}$ quer dizer que
   $$f([1, \infty)) = (0, 1]$$
   isto se traduz geométricamente dizendo que a imagem da semireta $[1, \infty)$ se encontra dentro da faixa $[1, \infty)$ x $(0, 1]$

   (d) (V)[ ](F)[ ] O gráfico de $f(x) = \frac{1}{x}$ é o que aparece na figura (1) página 2,

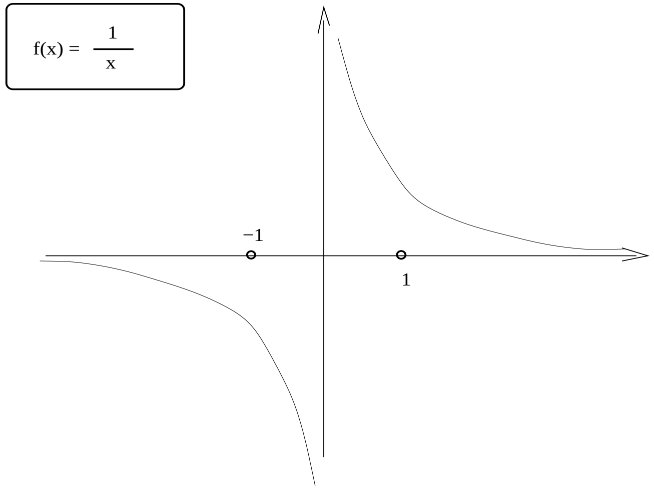

Figura 1: gráfico de $f(x) = \frac{1}{x}$ feito à mão com `xfig`

   (e) (V)[ ](F)[ ] a função $f(x) = \frac{1}{x}$ é contínua em qualquer intervalo que não contenha o zero.

3. Integral da função $f(x) = \frac{1}{x}$ Como não temos nenhuma regra para calcular a integral desta função[1], vamos calculá-la aproximadamente com somas de Riemann. Vamos descobrir propriedades que permitirão um cálculo mais rápido.

   (a) (V)[ ](F)[ ] $\int\limits_1^{10} \frac{dx}{x} \approx \sum\limits_{k=0}^{n-1} \frac{9}{n} \frac{1}{\frac{9k}{n}}$

   (b) (V)[ ](F)[ ] $\int\limits_1^{10} \frac{dx}{x} \approx \frac{9}{n} \sum\limits_{k=0}^{n-1} \frac{1}{1+\frac{9k}{n}}$

   (c) (V)[ ](F)[ ] Se $ab > 0$ podemos calcular $\int\limits_a^b \frac{dx}{x}$ *porque esta relação corresponde a um intervalo* $[a, b]$ (ou $[b, a]$) sobre o qual $f(x) = \frac{1}{x}$ é contínua.

   (d) (V)[ ](F)[ ] Uma aproximação para $\int\limits_a^b \frac{dx}{x}$ é

$$\sum_{k=0}^{n-1} \frac{\Delta x}{a + k\Delta x} \ ; \ \Delta x = \frac{b-a}{n}$$

   (e) (V)[ ](F)[ ] Os cálculos seguintes estão corretos:

$$0 < a < b; \Delta x = \tfrac{b-a}{n} \tag{1}$$

$$\int\limits_a^b \tfrac{dx}{x} \approx I = \sum_{k=0}^{n-1} \tfrac{\Delta x}{a+k\Delta x} \tag{2}$$

$$I = \Delta x \sum_{k=0}^{n-1} \tfrac{1}{a+k\Delta x} \tag{3}$$

$$I = \Delta x \sum_{k=0}^{n-1} \tfrac{1/a}{1+k\Delta x/a} \tag{4}$$

$$I = \Delta x/a \sum_{k=0}^{n-1} \tfrac{1}{1+k\Delta x/a} \tag{5}$$

$$\Delta x := \tfrac{b/a-1}{n} = \tfrac{b-a}{an} = \Delta x/a \tag{6}$$

$$\Delta x = \tfrac{b/a-1}{n}; I = \Delta x \sum_{k=0}^{n-1} \tfrac{1}{1+k\Delta x} \tag{7}$$

$$I \approx \int\limits_1^{b/a} \tfrac{dx}{x} \tag{8}$$

   Conclusão: $\int\limits_a^b \frac{dx}{x} = \int\limits_1^{b/a} \frac{dx}{x}$ podemos "cancelar" o limite inferior da integral

[1] experimente a regra da potência!

4. Propriedades da integral de $f(x) = \frac{1}{x}$

   (a) (V)[ ](F)[ ] A integral da função $f(x) = \frac{1}{x}$ no intervalo $[a, b]$; $a, b > 0$ é igual a integral da função $f(x) = \frac{1}{x}$ no intervalo $[1, b/a]$. Por exemplo:

$$\int\limits_2^{10} \tfrac{dx}{x} = \int\limits_1^{5} \tfrac{dx}{x} \tag{9}$$

$$\int\limits_{10}^{100} \tfrac{dx}{x} = \int\limits_1^{10} \tfrac{dx}{x} = \int\limits_1^{2} \tfrac{dx}{x} + \int\limits_2^{10} \tfrac{dx}{x} = \int\limits_1^{2} \tfrac{dx}{x} + \int\limits_1^{5} \tfrac{dx}{x} \tag{10}$$

$$\int\limits_{100}^{1000} \tfrac{dx}{x} = \int\limits_1^{10} \tfrac{dx}{x} = \int\limits_1^{2} \tfrac{dx}{x} + \int\limits_1^{5} \tfrac{dx}{x} \tag{11}$$

   (b) (V)[ ](F)[ ] As contas seguintes estão corretas:

$$5000 = 2 \ \text{x} \ 2 \ \text{x} \ 2 \ \text{x} \ 5 \ \text{x} \ 5 \ \text{x} \ 5 \ \text{x} \ 5 = 2^3 5^4 \tag{12}$$

$$I = \int\limits_1^{5000} \tfrac{dx}{x} = \int\limits_1^{10} \tfrac{dx}{x} + \int\limits_{10}^{5000} \tfrac{dx}{x} = \int\limits_1^{10} \tfrac{dx}{x} + \int\limits_{10}^{1000} \tfrac{dx}{x} + \int\limits_{1000}^{5000} \tfrac{dx}{x} = \tag{13}$$

$$\int\limits_1^{10} \tfrac{dx}{x} + \int\limits_{10}^{100} \tfrac{dx}{x} + \int\limits_{100}^{1000} \tfrac{dx}{x} \int\limits_{1000}^{5000} \tfrac{dx}{x} = 3 \int\limits_1^{10} \tfrac{dx}{x} + \int\limits_1^{5} \tfrac{dx}{x} \tag{14}$$

$$\int\limits_1^{10} \tfrac{dx}{x} = \int\limits_1^{2} \tfrac{dx}{x} + \int\limits_1^{5} \tfrac{dx}{x} \ \Rightarrow \ I = 3 \int\limits_1^{2} \tfrac{dx}{x} + 4 \int\limits_1^{5} \tfrac{dx}{x} \tag{15}$$

   (c) (V)[ ](F)[ ]

$$32 = 2^5 \tag{16}$$

$$\int\limits_1^{32} \tfrac{dx}{x} = 5 \int\limits_1^{2} \tfrac{dx}{x} \tag{17}$$

   (d) (V)[ ](F)[ ]

$$a = b^n \tag{18}$$

$$\int\limits_1^{b} \tfrac{dx}{x} = n \int\limits_1^{a} \tfrac{dx}{x} \tag{19}$$

   (e) (V)[ ](F)[ ]

$$c = ab \tag{20}$$

$$\int\limits_1^{c} \tfrac{dx}{x} = \int\limits_1^{a} \tfrac{dx}{x} + \int\limits_a^{ab} \tfrac{dx}{x} \tag{21}$$

$$\int\limits_1^{ab} \tfrac{dx}{x} = \int\limits_1^{a} \tfrac{dx}{x} + \int\limits_1^{b} \tfrac{dx}{x} \tag{22}$$

$$\tag{23}$$

5. Função logaritmo natural $y = ln(x)$ A nova função $\int_1^x \frac{dt}{t}$ se chama *logaritmo natural*. Notação: $ln(x) = \int_1^x \frac{dt}{t}$.

   (a) (V)[ ](F)[ ] Domínio de $y = ln(x)$ é a reta estritamente positiva, quer dizer, não podemos calcular a integral para $x <= 0$.

   (b) (V)[ ](F)[ ] Se $a, b > 0$ então $ln(ab) = ln(a) + ln(b)$.

   (c) (V)[ ](F)[ ] $ln(1) = 0$.

   (d) (V)[ ](F)[ ] Se $0 < a < 1$ então $ln(a) < 0$.

   (e) (V)[ ](F)[ ] $ln(a) = \int_1^a \frac{dx}{x} = \int_{1/a}^1 \frac{dx}{x} = -\int_1^{1/a} \frac{dx}{x} = -ln(1/a)$

   (f) (V)[ ](F)[ ] $ln(a/b) = ln(a) - ln(b)$

   (g) (V)[ ](F)[ ] $y = ln(x) = \int_1^x \frac{dx}{x}$ então $y = ln'(x) = \frac{1}{x}$, é sempre positiva logo $y = ln(x)$ é uma funçao crescente, negativa no intervalo $(0, 1]$, positiva no intervalo $[1, \infty)$ tal que $ln(1) = 0$ então o seu gráfico é o que se encontra na figura (2) página 5,

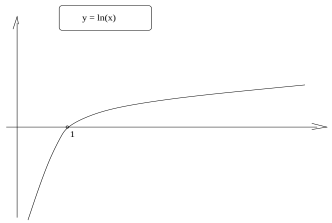

Figura 2: gráfico feito à mão, com `xfig`, de $y = ln(x)$

Os programas `exer10_05.calc`, `exer10_05.gnuplot` calculam os valor de $ln(a)$ para qualquer número que você escolher. Obviamente interessa apenas os logaritmos dos fatores primos de números inteiros:

```
valor aproximado do ln(2)  -->  0.69389724305993749692
valor aproximado do ln(3)  -->  1.09927902940884220169
valor aproximado do ln(6)  -->  1.79234288357989852577
 ln(2) + ln(3) = ln(6)
0.69389724305993749692 + 1.09927902940884220169  =
1.79234288357989852577
```


6. Propriedades da inversa do logaritmo $y = e^x$

   (a) (V)[ ](F)[ ] Como $y = ln(x)$ é uma função estritamente crscente, então é bijetiva e tem inversa. Notação a inversa de $y = ln(x)$ é $y = e^x$ e seu gráfico pode ser obtido por rebatimento em torno da primeira bisetriz do gráfico na figura (2). O resultado é o gráfico na figura (3) página 6,

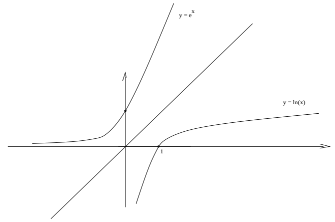

Figura 3: gráficos feitos á mão, com `xfig`, da Exponencial e do logaritmo

   (b) (V)[ ](F)[ ] Como $ln(ab) = ln(a) + ln(b)$ então $e^{ab} = e^a + e^b$.

   (c) (V)[ ](F)[ ] Como $ln(ab) = ln(a) + ln(b)$ então $e^{a+b} = e^a e^b$.

   (d) (V)[ ](F)[ ] Como $ln(1) = 0$ então $e^0 = 1$.

   (e) (V)[ ](F)[ ]
   - o domínio da exponencial é $\mathbf{R}$;
   - e o seu conjunto de valores é $\mathbf{R}^{++}$;
   - $exp : \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R}^{++}$
   - $e^x > 0$ para todo $x \in \mathbf{R}$;
   - $e^{-a} = \frac{1}{e^a}$;

   (f) (V)[ ](F)[ ] Derivada da exponencial Como

$$y = f(x) = exp(x) \text{ e } x = g(y) = ln(y)$$

   é um par de funções inversas então

$$f(g(y)) = x \quad \Rightarrow \quad [f(g(y))]' = f'(g(y))g'(y) = 1 \tag{24}$$

$$f'(g(y)) = \frac{1}{g'(y)} = \frac{1}{\frac{1}{y}} = y = exp(x) \tag{25}$$

$$f'(x) = exp(x) = f(x) \tag{26}$$

   Conclusão: a exponencial, $y = e^x$ é a única função cuja derivada é ela mesma: $[e^x]' = e^x$.

   (g) (V)[ ](F)[ ] Todas as derivadas de $y = e^x$, na origem, são iguais a 1. Usando a notação de Leibinz $\frac{d^n e^x}{dx^n}|_0 = 1$ para qualquer que seja $n \in \mathbf{N}$.