Calculo I | **Lista número 09** 19 de abril de 2010
T. Fund do Cálculo | **tarcisio@member.ams.org**
prof. T. Praciano-Pereira | **Dep. de Computação** UeVA

alun@:

www.calculo.sobralmatematica.org
Documento produzido com LaTeX | sis. op. Debian/Gnu/Linux

Data da entrega da lista: dia 26, segunda-feira.

0.0.1 Objetivo

Cálculo de integrais e o Teorema Fundamental do Cálculo.

Indução finita

$$1 + 2 + \cdots + n = \frac{n+1}{2}n \tag{1}$$
$$1 + 4 + \cdots n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \tag{2}$$
$$\sum_{k=1}^{n} k^3 = (1 + 2 + \cdots + n)^2 \tag{3}$$
$$\sum_{k=1}^{n} k^3 = (\frac{n+1}{2}n)^2 = \frac{(n+1)^2n^2}{4} \tag{4}$$
$$\sum_{k=0}^{n-1} k^4 = \frac{6n^5-15n^4+10n^3-n}{30} \tag{5}$$
$$\sum_{k=0}^{n-1} k^5 = \frac{2n^6-6n^5+5n^4-n^2}{12} \tag{6}$$

Palavras chave funções definidas com integral, integral de funções polinomiais, integral definida,

0.0.2 Avaliação do trabalho

Leia na página da disciplina a este respeito.

0.1 Exercícios

1. Função $f(x) = x^3$
   (a) (V)[ ](F)[ ] $\int_0^a x^3dx = a^4$
   (b) (V)[ ](F)[ ] $\int_0^a x^3dx = \frac{a^4}{4}$
   (c) (V)[ ](F)[ ] Se $f(x) = x^3$ então $\int_0^x f(t)dt = \frac{x^4}{4} = F(x)$
   (d) (V)[ ](F)[ ] $\int_a^b x^3dx = F(b) - F(a)$; $F(x) = \frac{x^4}{4}$
   (e) (V)[ ](F)[ ] A primitiva da função $f(x) = x^3$ é a função $F(x) = \frac{x^4}{4}$.
2. Primitivas de funções polinomiais
   (a) (V)[ ](F)[ ] A primitiva da função $f(x) = x^4$ é a função $F(x) = x^5$
   (b) (V)[ ](F)[ ] A primitiva da função $f(x) = x^4$ é a função $F(x) = \frac{x^5}{5}$
   (c) (V)[ ](F)[ ] Suponha que as funções f, g sejam integráveis num intervalo $[a, b]$ então
      i. quaisquer sejam as partições (malhas) do intervalo $[a, b]$ as somas de Riemann
      $$\sum_{k=0}^{n-1} f(a + k\Delta x)\Delta x \ ;$$
      definem um único número, notação $\int_a^b f(x)dx$
      ii. quaisquer sejam as partições (malhas) do intervalo $[a, b]$ as somas de Riemann
      $$\sum_{k=0}^{n-1} g(a + k\Delta x)\Delta x \ ;$$
      definem um único número, notação $\int_a^b g(x)dx$
      iii. Somando as somas "somas de Riemann" de f e de g relativamente a uma mesma partição resulta numa soma de Riemann para a função $f + g$ o que sugere que "a integral da soma e a soma das integrais"
   (d) (V)[ ](F)[ ] $\int_0^a (x + x^2)dx = \frac{a^2}{2} + \frac{a^3}{3}$
   (e) (V)[ ](F)[ ] $\int_0^a (1 + x + x^2)dx = a + \frac{a^2}{2} + \frac{a^3}{3}$

3. Funções trigonométricas

(a) (V)[ ](F)[ ]derivada de $A\sin(x)$ A função $A\sin(x)$ é a inversa de $\sin(x)$, quer dizer,

$$y = f(t) = A\sin(t); t = g(y) = \sin(y)\ ; f(g(y)) = t = g(f(t))$$

Os seguintes cálculos mostram qual é a derivada $A\sin(t)$

$$\begin{aligned}
&\tfrac{d}{dt}f(g(y)) = \tfrac{df}{dg}\tfrac{dg}{dt} = 1\\
&\tfrac{df}{dg} = \tfrac{1}{\frac{dg}{dt}} = \tfrac{1}{\cos(y)}\\
&\tfrac{df}{dg} = \tfrac{1}{\sqrt{1-\sin^2(y)}} = \tfrac{1}{\sqrt{1-t^2}}\\
&\tfrac{df}{dt} = \tfrac{dA\sin(t)}{dt} = \tfrac{1}{\sqrt{1-t^2}}\\
&\tfrac{dA\sin(x)}{dx} = \tfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}
\end{aligned} \tag{7}$$

(b) (V)[ ](F)[ ]derivada de $A\cos(x)$ A função $A\cos(x)$ é a inversa de $\cos(x)$, quer dizer,

$$y = f(t) = A\cos(t); t = g(y) = \cos(y)\ ; f(g(y)) = t = g(f(t))$$

Os seguintes cálculos mostram qual é a derivada $A\cos(t)$

$$\begin{aligned}
&\tfrac{d}{dt}f(g(y)) = \tfrac{df}{dg}\tfrac{dg}{dt} = 1\\
&\tfrac{df}{dg} = \tfrac{1}{\frac{dg}{dt}} = \tfrac{1}{\sin(y)}\\
&\tfrac{df}{dg} = \tfrac{1}{\sqrt{1-\cos^2(y)}} = \tfrac{1}{\sqrt{1-t^2}}\ \tfrac{df}{dt} = \tfrac{dA\cos(t)}{dt} = \tfrac{1}{\sqrt{1-t^2}}\\
&\tfrac{dA\cos(x)}{dx} = \tfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}
\end{aligned} \tag{8}$$

(c) (V)[ ](F)[ ]derivada de $A\cos(x)$ A função $A\cos(x)$ é a inversa de $\cos(x)$, quer dizer,

$$y = f(t) = A\cos(t); t = g(y) = \cos(y)\ ; f(g(y)) = t = g(f(t))$$

Os seguintes cálculos mostram qual é a derivada $A\cos(t)$

$$\begin{aligned}
&\tfrac{d}{dt}f(g(y)) = \tfrac{df}{dg}\tfrac{dg}{dt} = 1\\
&\tfrac{df}{dg} = \tfrac{1}{\frac{dg}{dt}} = -\tfrac{1}{\sin(y)}\\
&\tfrac{df}{dg} = -\tfrac{1}{\sqrt{1-\cos^2(y)}} = -\tfrac{1}{\sqrt{1-t^2}}\ \tfrac{df}{dt} = \tfrac{dA\cos(t)}{dt} = -\tfrac{1}{\sqrt{1-t^2}}\\
&\tfrac{dA\cos(x)}{dx} = -\tfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}
\end{aligned} \tag{9}$$

(d) (V)[ ](F)[ ] derivada $A\tan(x)$

$$\begin{aligned}
&y = f(t) = A\tan(t)\ ; t = g(y) = \tan(y)\ ;\ f(g(y)) = y\\
&\tfrac{df}{dt} = \tfrac{df}{dg}\tfrac{dg}{dy} = \tfrac{dy}{dy} = 1 \implies \tfrac{df}{dg} = \tfrac{1}{\frac{dg}{dy}}\\
&\tfrac{dA\tan(t)}{dt} = \tfrac{1}{\frac{dg}{dy}} = \tfrac{1}{\frac{1}{\cos^2(y)}}\\
&\tfrac{dA\tan(t)}{dt} = \tfrac{1}{\frac{\cos^2(y)+\sin^2(y)}{\cos^2(y)}}\\
&\tfrac{dA\tan(t)}{dt} = \tfrac{1}{1\tan^2(y)} = \tfrac{1}{1+t^2}
\end{aligned} \tag{10}$$

(e) (V)[ ](F)[ ] Primitivas

$$\begin{aligned}
&\int \tfrac{1}{1+t^2}dt = A\tan(t) + C\\
&\int \tfrac{1}{\sqrt{1-t^2}}dt = A\sin(t) + C
\end{aligned} \tag{11}$$

4. Regra de diferenciação e integral

(a) (V)[ ](F)[ ]Mudança de variável $f(x) = x^2$

$$\begin{aligned}
&\int_a^b f(3x)dx = \int_a^b (9x^2)dx\\
&\int_a^b f(3x)dx = 3x^3|_a^b
\end{aligned} \tag{12}$$

(b) (V)[ ](F)[ ]Mudança de variável $f(x) = x^2$

$$\begin{aligned}
&\int_a^b f(3x)dx = \int_a^b (9x^2)dx\\
&\int_a^b f(3x)dx = 3x^3|_{a/3}^{b/3}
\end{aligned} \tag{13}$$

(c) (V)[ ](F)[ ] Se $h(x) = f(g(x))$

$$\begin{aligned}
&\int_a^b h(x)dx = H(x)|_a^b \text{ Teor. fund. do Cálculo}\\
&H(x)|_a^b = H(g(t))|_\alpha^\beta \ \Leftarrow\ \alpha = g^{-1}(a), \beta = g^{-1}(b)\\
&\int_a^b h(x)dx = H(g(t))|_\alpha^\beta = \int_\alpha^\beta h(g(t))g'(t)dt
\end{aligned} \tag{14}$$

(d) (V)[ ](F)[ ] Suponha que f seja uma função contínua positiva, então $m(b-a) < \int_a^b f(x)dx < M(b-a)$ em que $m = \min_{[a,b]} f(x);\ M = \max_{[a,b]} f(x)$;

(e) (V)[ ](F)[ ] Suponha que f seja uma função contínua positiva, então existe um número $c \in [a,b]$ tal que $\int_a^b f(x)dx = f(c)(b-a)$ e então $f(c) = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx$ é o valor médio integral de f.

5. Integral de funções trigonométricas

(a) (V)[ ](F)[ ] Observe que $f(x) = -3\cos^4(x) + 10\cos^2(x) - 15\cos(x)$ é a composta de $\cos(x)$ com um polinômio. Então $f'(x) = 15\cos^5(x)$

(b) (V)[ ](F)[ ] Observe que $f(x) = -3\cos^5(x) + 10\cos^3(x) - 15\cos(x)$ é a composta de $\cos(x)$ com um polinômio. Então $f'(x) = 15\sin^5(x)$

(c) <u>(V)[ ](F)[ ]</u> Aceite a fórmula de Euler

$$cos(t) + isin(t) = e^{it};$$

Então
$$\cos(3x) = \cos^3(x) - 3\cos(x)\sin^2(x)$$

(d) <u>(V)[ ](F)[ ]</u> Aceite a fórmula de Euler

$$cos(t) + isin(t) = e^{it};$$

Então
$$\sin(3x) = 3\cos(x)\sin(x) - sin^3(x)$$

(e) <u>(V)[ ](F)[ ]</u>

$$\begin{array}{c} \int_0^{\pi}\cos^3(x)dx - 3\cos(x)\sin^2(x)dx = \\ = \int_0^{\pi}\cos(3x)dx = \frac{1}{3}\int_0^{\pi/3}\cos(3x)3dx = \\ = \frac{1}{3}\int_0^{\pi/3}\cos(u)du = \frac{1}{3}\sin(u)|_0^{\pi/3} = \sin(\pi/3) = \frac{\sqrt{3}}{2} \end{array} \tag{15}$$