Disciplina **Lista número.** 13 de abril de 2010
assunto desta lista **tarcisio@member.ams.org**
prof. T. Praciano-Pereira **Dep. de Computação** UeVA

alun@:

www.calculo.sobralmatematica.org
Documento produzido com LaTeX sis. op. Debian/Gnu/Linux

Data da entrega da lista: dia 19, de Abril, segunda-feira.

0.0.1 Objetivo

A lista está baseada na página de apoio, mas você deve consultar livros de Cálculo sobre o assunto da mesma.

Palavras chave cálculo aproximado da integral, funções definidas com a integral, integral de funções polinomiais, integral definida, integral indefinida.

0.0.2 Avaliação do trabalho

Leia na página da disciplina a este respeito.

Indução finita

Algumas fórmulas que podem ser provadas com indução finita.

$$1 + 2 + \cdots + n = \frac{n+1}{2}n \tag{1}$$

$$1 + 4 + \cdots n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \tag{2}$$

$$\sum_{k=1}^{n} k^3 = (1 + 2 + \cdots + n)^2 \tag{3}$$

$$\sum_{k=1}^{n} k^3 = (\frac{n+1}{2}n)^2 = \frac{(n+1)^2n^2}{4} \tag{4}$$

$$\sum_{k=0}^{n-1} k^4 = \frac{6n^5 - 15n^4 + 10n^3 - n}{30} \tag{5}$$

$$\sum_{k=0}^{n-1} k^5 = \frac{2n^6 - 6n^5 + 5n^4 - n^2}{12} \tag{6}$$

Vou precisar destas fórmulas no cálculo de integrais de funções polinomais.

0.1 Exercícios

1. Integral da função do primeiro grau

(a) (V)[ ](F)[ ] Se $f(x) = mx + b$ então

$$\int_a^x mt + p$$

é uma função do primeiro grau.

(b) (V)[ ](F)[ ] Se $f(x) = mx + b$ então

$$\int_a^x mt + p$$

é uma função do segundo grau. A constante $\underline{a}$ recebe o nome de *condição inicial*.

(c) (V)[ ](F)[ ] Se $f(x) = mx + b$ então

$$\int_a^x mt + p = F(x)$$

é uma função do segundo grau, e F(a) = 0. A constante $\underline{a}$ recebe o nome de *condição inicial*.

(d) (V)[ ](F)[ ] Se $f(x) = mx + b$ então

$$\int_a^{a+\rho} mt + p = F(\rho) = \int_a^{a-\rho} mt + p = F(-\rho)$$

(e) (V)[ ](F)[ ] Se $f(x) = mx + b$ então

$$\int_a^{a+\rho} mt + p = F(\rho) = -\int_a^{a-\rho} mt + p = F(-\rho)$$

tem sinais contrários, não importa o sinal de ρ.

2. A integral da função do segundo grau

(a) (V)[ ](F)[ ] Se $f(x) = x^2$ então podemos calcular o valor da integral $\int_0^a f(x)$ aproximando com retângulos

$$\int_0^a f(x) \approx f(0)\Delta x + f(\Delta x)\Delta x + \cdots + f((n-1)\Delta x)\Delta x$$

(b) (V)[ ](F)[ ] Se $f(x) = x^2$ então podemos calcular o valor da integral $\int_0^a f(x)$ aproximando com retângulos

$$\int_0^a f(x) \approx \sum_{k=0}^{n-1} f(k\Delta x)\Delta x$$

é uma aproximação por falta.

(c) (V)[ ](F)[ ] Se $f(x)=x^2$ então podemos calcular o valor da integral $\int_0^a f(x)$ aproximando com retângulos

$$\int_0^a f(x) \approx \sum_{k=1}^{n} f(k\Delta x)\Delta x$$

é uma aproximação por excessso.

(d) (V)[ ](F)[ ] Se $f(x)=x^2$ então podemos calcular o valor da integral $\int_0^a f(x)$ aproximando com retângulos

$$\int_0^a f(x) \approx \sum_{k=0}^{n-1} f(k\Delta x)\Delta x = \Delta \sum_{k=0}^{n-1} f(k\Delta x$$

(e) (V)[ ](F)[ ] Se $f(x)=x^2$ então podemos calcular o valor da integral $\int_0^a f(x)$ aproximando com retângulos

$$\int_0^a f(x) \approx \sum_{k=0}^{n-1} f(k\Delta x)\Delta x = \Delta x^3 \sum_{k=0}^{n-1} k^2;\ ;\Delta x = \frac{a}{n}$$

3. Integral de funçãoes polinomiais

(a) (V)[ ](F)[ ] Como a soma dos quadrados é calculada com a fórmula $1+4+\cdots n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ então

$$\int_0^a x^2 \approx \frac{a^3}{n^3}\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \tag{7}$$

$$\int_0^a x^2 \approx \frac{a^3 2n^3+3n^2+n}{6n^3} \tag{8}$$

$$\int_0^a x^2 = \frac{a^3}{3} \tag{9}$$

O programa `exer08_03_a.gnuplot` foi usado para preparar esta lista.

(b) (V)[ ](F)[ ] $\int_0^1 x^2 = \frac{1}{2}$

(c) (V)[ ](F)[ ] $\int_0^1 x^2 = \frac{1}{3}$

(d) (V)[ ](F)[ ] $\int_{-1}^0 x^2 = \frac{1}{3}$

(e) (V)[ ](F)[ ] $\int_1^0 x^2 = -\frac{1}{3}$

4. Algumas regras de integração Alguns experimentos vão nos revelar certas regras.

(a) (V)[ ](F)[ ] $\int_0^5 x^2 = -\frac{5^2}{3}$

(b) (V)[ ](F)[ ] $\int_0^5 x^2 = -\frac{5^3}{3}$

(c) (V)[ ](F)[ ] $\int_0^2 x^2 = -\frac{2^3}{3}$

(d) (V)[ ](F)[ ] $\int_0^5 x^2 - \int_0^2 x^2 = \int_2^3 x^2$

(e) (V)[ ](F)[ ] $\int_2^5 x^2 = \frac{5^3}{3} - \frac{2^3}{3}$

5. O Teorema Fundamental do Cálculo

(a) (V)[ ](F)[ ] $\int_0^x x^2 = F(x) = \frac{x^3}{3}$

(b) (V)[ ](F)[ ] $\int_2^5 x^2 = F(5) - F(2)$

(c) (V)[ ](F)[ ] $\int_1^{10} x^2 = F(10) - F(1)$

(d) (V)[ ](F)[ ] $\int_{-3}^5 x^2 = F(5) - F(-3)$

(e) (V)[ ](F)[ ] $\int_a^b x^2 = F(b) - F(a)$ é o um exemplo do Teorema Fundamental do Cálculo.