Cálculo I | **Lista número 06, 14 de março de 2010**
Limite, continuidade, derivadas | tarcisio@member.ams.org
T. Praciano-Pereira | **Dep. de Computação - UeVA**

alun@:

página da disciplina www.calculo.sobralmatematica.org
Documento produzido com LaTeX sis. op. Debian/Gnu/Linux

1 Informações

Por favor , siga as instruções sobre nomes de arquivos, leia as intruções na página da disciplina.

Se o trabalho for feito em equipe, basta um único trabalho ser entregue e neste caso, no cabeçalho, devem estar os nomes completos de tod@s @s alun@s junto com os seus respectivos e-mails. O número de membros de uma equipe não deve ultrapassar três.

Data da entrega da lista: dia 22 de Março, segunda-feira.

1.1 Objetivo

Treinamento dos conceitos, derivada, interpretação geométrica da derivada, limite, continuidade. Os programas `exer06*.gnuplot` servem de apoio ao seu trabalho nesta lista.

Palavras chavecontinuidade, derivada, gráfico de funções, interpretação geométrica da derivada, interpretação geométrica da segunda derivada, limite.

1.2 Avaliação do trabalho

Leia na página da disciplina a este respeito.

2 Exercícios

1. Gráficos de funções

$$f(x) = \begin{cases} x \in (-\infty, -2] & 4 - x^2 \\ x \in (-2, 0] & 4(x+2) \\ x \in (0, 2] & -x^2 + 4x + 8 \\ x \in (2, \infty) & 12 \end{cases}$$

   (a) (V)[ ](F)[ ] $f(-1) = 0$
   (b) (V)[ ](F)[ ] $f(-1) = 4$
   (c) (V)[ ](F)[ ] $f'(2) = -4$
   (d) (V)[ ](F)[ ] $f'(2) = 4$

   (e) (V)[ ](F)[ ] O grafico de f é o que se encontra na figura (1) página 2,

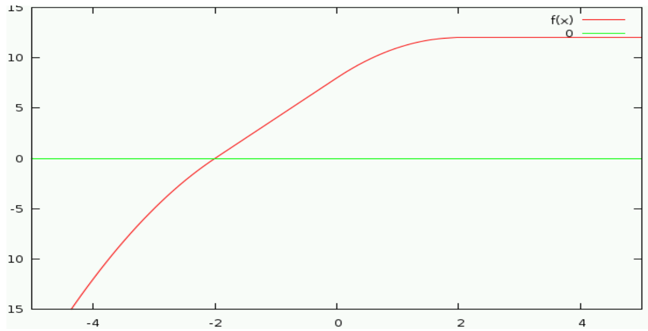

Figura 1: gráfico de y = f(x)

2. Gráfico, assíntota Estudo do gráfico, do domínio, da continuidade e do limite de $y = f(x) = \frac{x+4}{x^2-3x-10}$.

   (a) (V)[ ](F)[ ] O domínio de $y = f(x)$ é $\mathbf{R}$.
   (b) (V)[ ](F)[ ] O domínio de $y = f(x)$ é $\mathbf{R} - \{-4, 2\}$
   (c) (V)[ ](F)[ ] Para grandes valores de $|x|$ os valores de $y = f(x)$ são *arbitrariamente pequenos em módulo* o que pode ser expresso com a sentença

   $$(\forall \rho > 0); (\exists N \in \mathbf{N})(|x| > N \implies |f(x)| < \rho)$$

   o que significa que o eixo OX é uma assíntota ao gráfico de f, tanto pelo lado positivo como pelo lado negativo.
   (d) (V)[ ](F)[ ] Se $a \in \{-2, 5\}$ então $f(a)$ não está definido porque o denominador se anula para $x = a$. Isto significa que nas vizinhanças destes pontos f é *arbitrariamente grande em módulo* e podemos dizer que $\lim_{x=a} f(x) = \pm\infty$.
   (e) (V)[ ](F)[ ] O gráfico de $y = f(x)$ tem três retas assíntotas, uma horizontal, OX, e duas verticais, $x = a; a \in \{-2, 5\}$. O gráfico de $y = f(x)$ é o que se encontra na figura (2), página 3,

   Experimente fazer o gráfico de $y = f(x) = \frac{x+4}{x^2-3x-10}$ com gnuplot, analise o resultado, escreva[1] sobre o que acontece, comparando o gráfico feito por

[1] Sugiro o tema "*a capacidade da máquina e o cérebro da mulher...*". Obviamente que não podemos nos esquecer da derrota de Kasparov contra o Deep Blue em 1996 que deve ser analisada em contexto próprio. Procure Deep Blue.

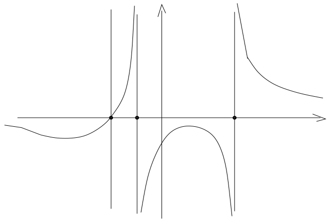

Figura 2: Gráfico de uma hipérbole

gnuplot com a figura (2), feito manualmente por mim.

3. Gráficos de funções Estudo do gráfico, do domínio, da continuidade e do limite de $y = f(x) = \frac{x^3+4}{x^2-3x-10}$.
   (a) (V)[ ](F)[ ] A tabela

x	$-\infty$		-2		$-\sqrt[3]{4}$		0		5		$+\infty$
x^3+4	$-\infty$	$-$	-4	$-$	0	$+$	4	$+$	129	$+$	$+\infty$
$x^2-3x-10$	$+\infty$	$+$	0	$-$	-0.88	$-$	-10	$-$	0	$+$	$+\infty$
$f(x)$	?	$+$	$\pm\infty$	$+$	0	$-$	$-4/10$	$-$	$\pm\infty$	$+$	?

   Descreve corretamente o sinal de $y = f(x)$ ao longo do domínio.
   (b) (V)[ ](F)[ ] No intervalo $[-\sqrt[3]{4}, 5]$ o gráfico tem que mudar de concavidade porque há um ponto, x_0, até onde a derivada decresce, e, depois de x_0 a derivada volta a crescer. A segunda derivada detecta este ponto.
   (c) (V)[ ](F)[ ] Quando $x \in \{-2, 5\}$ o denominador em $y = f(x)$ é zero consequentemente, nas vizinhanças destes pontos, $y = f(x)$ assume valores arbitráriamente grandes.
   (d) (V)[ ](F)[ ] Quando $x \in \{-2, 5\}$ o denominador em $y = f(x)$ é zero consequentemente, nas vizinhanças destes pontos, $y = f(x)$ assume valores arbitráriamente grandes em valor absoluto.
   (e) (V)[ ](F)[ ] O gráfico de $y = f(x)$ é o que se encontra na figura (3) página 4, feito manualmente com `xfig`.

4. Derivada da tangente A função $y = f(x) = tan(x)$ tem pontos de descontinuidade, mas fora deles é derivável.
   (a) (V)[ ](F)[ ] O domínio de $y = f(x) = tan(x)$ é $\{x; x \neq k\pi\}$
   (b) (V)[ ](F)[ ] O domínio de $y = f(x) = tan(x)$ é $\{x; x \neq k\pi + \frac{\pi}{2}\}$
   (c) (V)[ ](F)[ ] Nos pontos em que $y = f(x) = tan(x)$ for derivável, sua derivada é dada por $-\frac{1}{cos^2(x)}$.

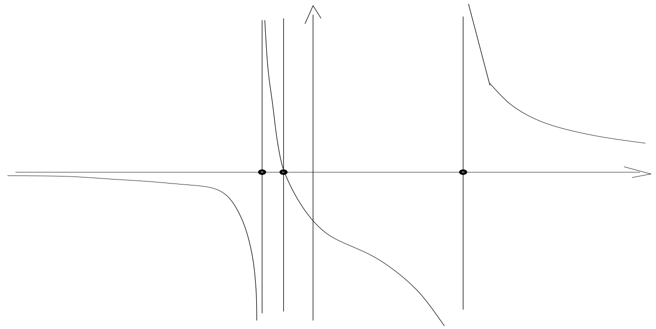

Figura 3: gráfico de $y = \frac{x^3+4}{x^2-3x-10}$

   (d) (V)[ ](F)[ ] Nos pontos em que $y = f(x) = tan(x)$ for derivável, sua derivada é dada por $\frac{1}{cos^2(x)}$.
   (e) (V)[ ](F)[ ] Nos pontos em que $y = f(x) = tan(x)$ não for derivável, o seu gráfico possue uma assíntota vertical.

Você pode obter o gráfico de $y = f(x) = tan(x)$ com gnuplot mas também pode fazê-lo manualmente para ver a diferença de resultados.

5. Derivada e continuidade A função

$$f(x) = \begin{cases} x \in (-\infty, -3] & 2x+1; \\ x \in [-3, 0) & \frac{x^2+10x+27}{2}; \\ x \in [0, 3) & \frac{10x+27}{2}; \\ x \in [3, 4] & -3x^2+23x-13.5; \\ x \in (4, \infty) & -x+34.5; \end{cases} \quad (1)$$

   (a) (V)[ ](F)[ ] f é uma função descontínua no ponto $x = -3$.
   (b) (V)[ ](F)[ ] f é uma função contínua.
   (c) (V)[ ](F)[ ] Alterando a equação de f para $2x+9$ quando $x \in (-\infty, -3]$ se obtém uma função contínua.
   (d) (V)[ ](F)[ ] $f'(-1) = 4$ não importa que você tenha corrigido a equação, ou não.
   (e) (V)[ ](F)[ ] $f'(3) = 5$

O gráfico da função tornada contínua é o que pode ser visto na figura (4) página 5.

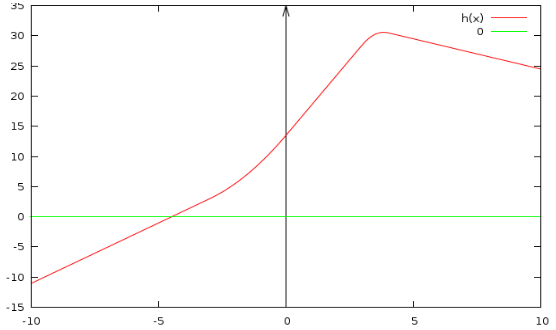

Figura 4: Gráfico de uma função polinomial por pedaços

6. Cálculo de derivadas

(a) (V)[ ](F)[ ] $f(x) = \frac{sin(3x+4)}{1+x^2}$ então

$$f'(x) = \frac{2xsin(3x+4) - 3cos(3x+4)(1+x^2)}{(1+x^2)^2}$$

(b) (V)[ ](F)[ ] $f(x) = \frac{sin(4-x^2)}{cos(1/(1+x^2))}$ então

$$f'(x) = \frac{\frac{2xsin(4-x^2)sin(1/(1+x^2))}{(1+x^2)^2} - 2xcos(4-x^2)cos(1/(1+x^2))}{cos^2(1/(1+x^2))}$$

(c) (V)[ ](F)[ ] $f(x) = \frac{sin(4+x^2)}{cos(4+x^2)}$ então $f(x) = \frac{sin(u(x))}{cos(u(x))}$ e

$$f'(x) = \frac{u'(x)}{cos^2(u(x))} \quad (2)$$

$$f'(x) = \frac{2x}{cos^2(4+x^2)} \quad (3)$$

(d) (V)[ ](F)[ ] $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$ é uma função derivável definida na reta inteira e sua derivada é $f'(x) = \frac{2x}{(1+x^2)^2}$

(e) (V)[ ](F)[ ] $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$ é uma função derivável definida na reta inteira e sua derivada é $f'(x) = \frac{-2x}{(1+x^2)^2}$