Calculo I	**Lista número 05**
Derivada do seno e do coseno	tarcisio@member.ams.org
T. Praciano-Pereira	**Dep. de Computação**
alun@:	
Univ. Estadual Vale do Acaraú	8 de março de 2010
8 de março de 1857, 130 tecelãs morreram,	carbonizadas, lutando por direitos mínimos
página da disciplina	www.calculo.sobralmatematica.org
Documento produzido com LaTeX	sis. op. Debian/Gnu/Linux

1 Informações

Data da entrega da lista: dia 15 de Março, segunda-feira. A partir desta lista *os trabalhos atrazados não serão mais corrigidos* (concorrem exclusivamente à nota mínima, 05). Se o trabalho for feito em equipe, basta um único trabalho ser entregue e neste caso, no cabeçalho, devem estar os nomes completos de tod@s @s alun@s junto com os seus respectivos e-mails. O número de membros de uma equipe não deve ultrapassar três.

1.1 Objetivo

Funções funções trigonométricas e os números complexos.

Nesta lista de exercícios vamos recuperar várias desigualdades trigonométricas com o objetivo de provar que

$$(sen(x))' = cos(x) \text{ e } (cos(x))' = -sen(x) \tag{1}$$

Palavras chave seno, coseno, relações trigonométricas, derivada do seno, derivada do coseno, fórmula de Euler.

1.2 Avaliação do trabalho

Leia na página da disciplina a este respeito.

2 Exercícios

Em todas as questões desta lista a variável ρ representa o zero, ou, ainda, sempre vou calcular o limite $\lim\limits_{\rho=0}$

1. Confira os cálculo algébricos

   (a) (V)[ ](F)[ ] Se $u = (2+3i), v = (3+2i)$ então

   $$u + v = (2+3i) + (3+2i) = 5 + 5i$$

   (b) (V)[ ](F)[ ] Se $u = (2+3i), v = (3+2i)$ então

   $$uv = (2+3i)(3+2i) = 5 + 5i$$

   (c) (V)[ ](F)[ ] Se $u = (2+3i), v = (3+2i)$ então

   $$uv = (2+3i)(3+2i) = 10i$$

   (d) (V)[ ](F)[ ] $(a+bi) + (c+di) = ac - bdi$

   (e) (V)[ ](F)[ ] $(a+bi) + (c+di) = (a+c) + i(b+d)$

2. Identifique as afirmações corretas

   (a) (V)[ ](F)[ ] $(2+3i)(3+2i) = 4i + 9i$

   (b) (V)[ ](F)[ ] $(2+3i)(3+2i) = 13i$

   (c) (V)[ ](F)[ ] $i^2 = 1$

   (d) (V)[ ](F)[ ] $i^2 = -1$

   (e) (V)[ ](F)[ ] $x^2 = 1 \rightarrow x = \pm i$

3. Identifique as afirmações corretas

   (a) (V)[ ](F)[ ] $|(2+3i)| = 13$

   (b) (V)[ ](F)[ ] $|(2+3i)| = \sqrt{13}$

   (c) (V)[ ](F)[ ] $(2+3i)\frac{2-3i}{13} = 1$

   (d) (V)[ ](F)[ ] $|(cos(\gamma) + isen(\gamma)| = 2$

4. Identifique as afirmações corretas

   (a) (V)[ ](F)[ ] $|(cos(\gamma) + isen(\gamma)| = 1$

   (b) (V)[ ](F)[ ] $(2+3i)(2-3i) = \sqrt{13}$

   (c) (V)[ ](F)[ ] $(2+3i)(2-3i) = 13$

   (d) (V)[ ](F)[ ] $cos^2(\gamma) + sin^2(\gamma) = 0$

   (e) (V)[ ](F)[ ] $cos^2(\gamma) + sin^2(\gamma) = 1$

5. Notação de Euler:

   $$cos(\gamma) + isen(\gamma) = e^{i\gamma} \tag{2}$$

   Selecione valores para α, γ e represente geometricamente

   $$e^{i\gamma} = (cos(\gamma) + isen(\gamma)) \tag{3}$$
   $$e^{i\alpha} = (cos(\alpha) + isen(\alpha)) \tag{4}$$
   $$e^{-i\gamma} = (cos(-\gamma) + isen(-\gamma)) \tag{5}$$

   O produto dos números complexos $e^{i\gamma}, \ e^{i\alpha}$ é

(a) (V)[ ](F)[ ] $e^{i(\gamma+\alpha)} = cos(\gamma)sen(\gamma) + icos(\alpha)sen(\alpha)$

(b) (V)[ ](F)[ ] $e^{i(\gamma+\alpha)} = cos(\gamma)cos(\alpha) - sen(\gamma)sen(\alpha)$

(c) (V)[ ](F)[ ]

$$e^{i(\gamma+\alpha)} =$$
$$= cos(\gamma)cos(\alpha) - sen(\gamma)sen(\alpha) + i\,[cos(\gamma)sen(\alpha) + sen(\gamma)cos(\alpha)]$$

6. A derivada do seno A figura (1) página 5, apresenta-lhe o *círculo trigonométrico*

(a) (V)[ ](F)[ ] O operador quociente e seno. Para pequenos valores de ρ é verdade

$$Q_\rho(sin)(x) = \frac{sin(x+\rho)-sin(x)}{\rho}$$
$$Q_\rho(sin)(x) = \frac{sin(x)cos(\rho)+sin(\rho)cos(x)-sin(x)}{\rho}$$
$$Q_\rho(sin)(x) = \frac{sin(x)(cos(\rho)-1)+sin(\rho)cos(x)}{\rho}$$
$$Q_\rho(sin)(x) = \frac{sin(x)(cos(\rho)-1)}{\rho} + \frac{sin(\rho)cos(x)}{\rho}$$
$$Q_\rho(sin)(x) = sin(x)\frac{(cos(\rho)-1)}{\rho} + \frac{sin(\rho)}{\rho}cos(x)$$

(b) (V)[ ](F)[ ] Se admitirmos a hipótese de que as funções *seno* e *coseno* são contínuas e deriváveis na origem, então os cálculos no item anterior nos conduzem a

$$\frac{sin(\rho)}{\rho} = \frac{sin(0+\rho)-sin(0)}{\rho} =$$
$$Q_\rho(sin)(0) = \frac{sin(\rho)}{\rho} \to sin'(0)$$
$$\frac{(cos(\rho)-1)}{\rho} = \frac{(cos(0+\rho)-cos(0))}{\rho} =$$
$$Q_\rho(cos)(0) = \frac{(cos(0+\rho)-cos(0))}{\rho} \to cos'(0)$$

mas nós ainda não sabemos quanto valem $sin'(0)$ e $cos'(0)$, apenas sabemos que existem.

(c) (V)[ ](F)[ ] Podemos verificar, examinando o círculo trigonométrico, na figura (1), que para pequenos valores do ângulo ρ é verdade que

$$\frac{sin(\rho)}{tg(\rho)} < Q_\rho(sin)(0) =$$
$$Q_\rho(sin)(0) = \frac{sin(0+\rho)-sin(0)}{\rho} + \frac{sin(\rho)}{\rho} < \frac{\rho}{\rho} = 1$$

E como $\frac{sin(\rho)}{tg(\rho)} = \frac{1}{cos(\rho)}$ é uma função contínua nas vizinanças de zero, então

$$\to_{\rho=0} \frac{sin(\rho)}{tg(\rho)} = \frac{1}{cos(0)} = 1$$

então pelo *teorema do Sanduiche*, $sin'(0) = 1$.

(d) (V)[ ](F)[ ] Derivada do seno.

$$Q_\rho(sin)(x) = \frac{sin(x+\rho)-sin(x)}{\rho} =$$
$$= \frac{sin(x)cos(\rho)-sin(\rho)cos(x)-sin(x)}{\rho} =$$
$$= \frac{sin(x)(cos(\rho)-1)-sin(\rho)cos(x)}{\rho} =$$
$$= sin(x)\frac{cos(\rho)-1}{\rho} - \frac{sin(\rho)}{\rho}cos(x)$$
$$\lim_{\rho=0} Q_\rho(sin)(x) = sin'(x) = cos(x)$$

(e) (V)[ ](F)[ ] A derivada do coseno.

$$Q_\rho(cos)(x) = \frac{cos(x+\rho)-cos(x)}{\rho} =$$
$$= \frac{cos(x)cos(\rho)-sin(x)sin(\rho)-cos(x)}{\rho} =$$
$$= \frac{cos(x)(cos(\rho)-1)-sin(x)sin(\rho)}{\rho} =$$
$$= cos(x)\frac{cos(\rho)-1}{\rho} - sin(x)\frac{sin(\rho)}{\rho}$$
$$\lim_{\rho=0} Q_\rho(cos)(x) = -sin(x)$$

7. Na figura (2) página 6, há dois pontos marcados no círculo trigonométrico, $e^{i\alpha}, e^{-i\gamma}$ eles determinam o ângulo $\alpha - \gamma$. A distância entre estes dois pontos é

(a) (V)[ ](F)[ ] $2 + 2cos(\alpha - \gamma)$

(b) (V)[ ](F)[ ] $1 - cos(\alpha - \gamma)$

(c) (V)[ ](F)[ ] $2 - 2cos(\alpha - \gamma)$

(d) (V)[ ](F)[ ] $h = \sqrt{2 - 2cos(\alpha - \gamma)}$

8. Na figura (2) página 6, há dois pontos marcados no círculo trigonométrico, $e^{i\alpha}, e^{-i\gamma}$ eles determinam a hipotenusa de um triângulo retângulo indicado na figura. Os catetos deste triângulo retângulo, r, s, medem

(a) (V)[ ](F)[ ] $1 - cos(\alpha - \gamma), cos(\alpha - \gamma)$

(b) (V)[ ](F)[ ] Sendo $h = \sqrt{2 - 2cos(\alpha - \gamma)}$, um dos catetos sendo $r = 1 - cos(\alpha - \gamma)$ então o outro cateto é $s = \sqrt{l^2 - h^2}$

(c) (V)[ ](F)[ ] Sendo $h = \sqrt{2 - 2cos(\alpha - \gamma)}$, um dos catetos sendo $r = 1 - cos(\alpha - \gamma)$ então o outro cateto é $s = \sqrt{h^2 - l^2}$

(d) (V)[ ](F)[ ] Os catetos são $r = 1 - cos(\alpha - \gamma)$ e $s = sen(\alpha - \gamma)$

9. Gráfico do seno e do coseno

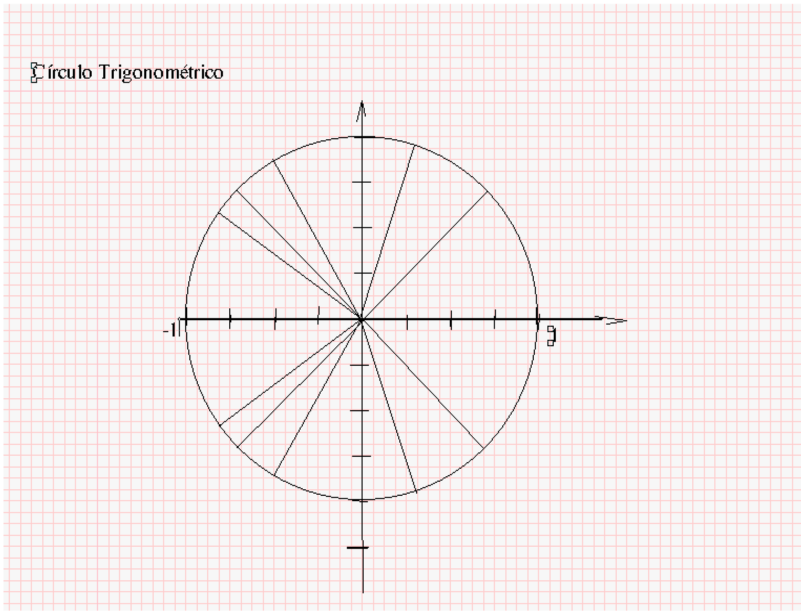

Figura 1: Círculo Trigonométrico

(a) (V)[ ](F)[ ] O coseno pode ser interpretado como a *abcissa*, a coordenada "x", de um ponto $\underline{P}$ sobre o círculo unitário. Consequentemente $cos(\alpha)$ pode ser maior do que 1.

(b) (V)[ ](F)[ ] O coseno pode ser interpretado como a *abcissa*, a coordenada "x", de um ponto $\underline{P}$ sobre o círculo unitário. Consequentemente $-1 < cos(\alpha) < 1$.

(c) (V)[ ](F)[ ] Na expressão $cos(\alpha)$ o parâmetro α é a médida de arco do círculo unitário tendo o ponto $(0,1)$ como início e o ponto $\underline{P}$ como final.

(d) (V)[ ](F)[ ] O seno pode ser interpretado como a *ordenada*, a coordenada "y", de um ponto $\underline{P}$ sobre o círculo unitário. Consequentemente $cos(\alpha)$ pode ser maior do que 1.

(e) (V)[ ](F)[ ] O perímetro do círculo unitário é 2π e as frações deste

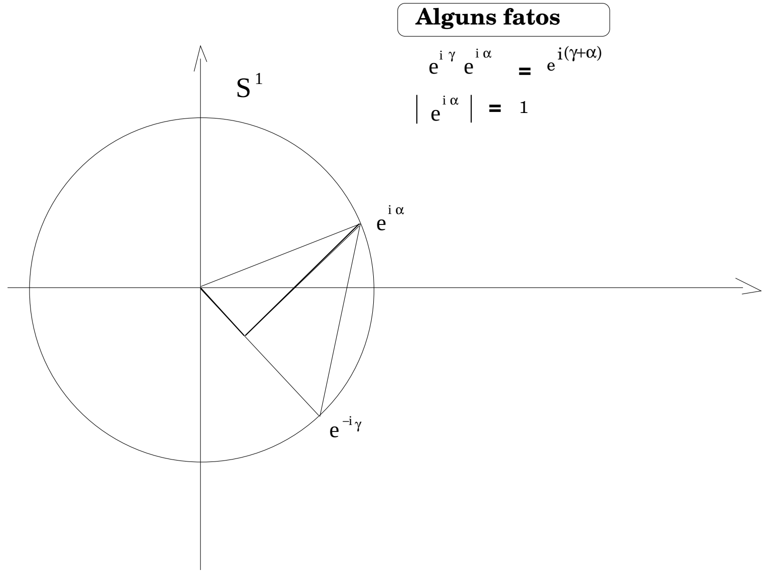

Figura 2: Distância entre dois pontos no círculo trigonométrico

número representam a medida natural dos ângulos. Por definição os valores do *seno* e do *coseno* são periódicos, se repetindo a cada 2π.