Cálculo Dif. e Int. I
Lista numero 04
Operações com funções
tarcisio@member.ams.org
T. Praciano-Pereira
Dep. de Computação

alun@:

UeVA
28 de fevereiro de 2010
www.calculo.sobralmatematica.org
Documento produzido com LaTeX
sis. op. Debian/Gnu/Linux

1 Informações

Por favor , siga as instruções sobre nomes de arquivos, leia as intruções na página da disciplina.

Data da entrega da lista: dia 09 de Março, terça-feira.

1.1 Objetivo

Funções polinomiais, gráficos, derivada.

Esta lista, junto com os programas `exer04*.gnuplot` tem a finalidade de prepará-l@s para o cálculo de derivadas. Todos os programas mencionados na lista se encontram no link "programas" da página. Para calcular derivadas, estamos usando limites de quocientes somente agora no começo, logo, logo, isto vai ficar para trás, usaremos regras de derivação. Leia o texto de apoio a lista.

Palavras chave diferença, operações com funções, gráficos de funções, translação de funções, soma e produto de funções, operador quociente de diferenças, operador diferença, $\Delta_\rho(f)(x)$, $Q_\rho(f)(x)$.

Notação:

$$\Delta_\rho(f)(x) = f(x+\rho) - f(x)$$

para uma constante ρ dada, é o operador *diferença*.

$$\mathbf{Q}_\rho(f)(x) = \frac{f(x+\rho) - f(x)}{\rho} = \frac{\Delta_\rho(f)(x)}{\rho}$$

para uma constante ρ dada é o operador *quociente*. A notação do quociente não é padronizada, a da diferença é.

2 Exercícios

1. Signficado geométrico da derivada A função f tem seu o gráfico na figura (1).

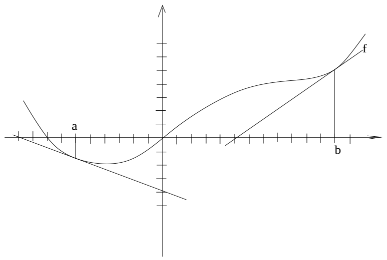

Figura 1: $graf(f)$ com retas tangentes

(a) (V)[ ](F)[ ] O coeficiente angular instantâneo de f no ponto $(a, f(a))$ é $f'(a)$, um número positivo.

(b) (V)[ ](F)[ ] O coeficiente angular instantâneo de f no ponto $(b, f(b))$ é $f'(b)$, um número positivo.

(c) (V)[ ](F)[ ] O coeficiente angular instantâneo de f no ponto $(a, f(a))$ é $f'(a) \approx -0.39$.

(d) (V)[ ](F)[ ] O coeficiente angular instantâneo de f no ponto $(b, f(b))$ é $f'(b) \approx 0.41$

(e) (V)[ ](F)[ ] A derivada de f é zero numa vizinhança do ponto $(-4, f(-4))$.

2. Operações com funções Leia e rode o programa `exer04_01.gnuplot`

(a) (V)[ ](F)[ ] O programa `exer04_01.gnuplot` dá exemplo de operações algébricas, soma, produto, translação, com funções.

(b) (V)[ ](F)[ ] Dadas as equações de duas funções f, g podemos calcular

$$f + g, fg, fog;$$

Se f, g forem polinômios, então

$$f + g, fg, fog$$

também serão polinômios do mesmo grau que f e g.

(c) (V)[ ](F)[ ] Dadas as equações de duas funções f, g podemos calcular

$$f + g, fg, fog;$$

Se f, g forem polinômios, então

$$f + g, fg, fog$$

também serão polinômios mas nem sempre do mesmo grau que f e g.

(d) (V)[ ](F)[ ] Se f for um polinômio, qualquer translação de f, na direção OX ou na direção OY será também um polinômio do mesmo grau que f.

(e) (V)[ ](F)[ ] `gnuplot` "sabe" fazer operações algébricas com funções e pode produzir o gráfico do resultado.

3. operador diferença e o grau Faça experiências com o programa `exer04_02.gnuplot`.

(a) (V)[ ](F)[ ] Se f for um polinômio do segundo grau, e se ρ for uma constante dada, podemos definir uma nova função, composta de adição e translação:

$$\Delta_\rho(f)(x) = f(x+\rho) - f(x)$$

A função $\Delta_\rho(f)(x)$ é do segundo grau. Teste com gnuplot se é possível fazer um gráfico, isto comprova que a função foi definida.

(b) (V)[ ](F)[ ] Se f for um polinômio do segundo grau, e se ρ for uma constante dada, podemos definir uma nova função, composta de adição e translação:

$$\Delta_\rho(f)(x) = f(x+\rho) - f(x)$$

A função $\Delta_\rho(f)(x)$ é do primeiro grau. Teste com gnuplot se é possível fazer um gráfico, isto comprova que a função foi definida.

(c) (V)[ ](F)[ ] Se f for um polinômio do segundo grau, e se ρ for uma constante dada, podemos definir uma nova função, composta de adição, multiplicação (quociente) e translação:

$$Q_\rho(f)(x) = \frac{\Delta_\rho(f)(x)}{\rho}$$

A função $Q_\rho(f)(x)$ é do segundo grau. Teste com gnuplot se é possível fazer um gráfico, isto comprova que a função foi definida.

(d) (V)[ ](F)[ ] Se f for um polinômio do segundo grau, e se ρ for uma constante dada, podemos definir uma nova função, composta de adição, multiplicação (quociente) e translação:

$$Q_\rho(f)(x) = \frac{\Delta_\rho(f)(x)}{\rho}$$

A função $Q_\rho(f)(x)$ é do primeiro grau.

(e) (V)[ ](F)[ ] Se f for um polinômio do terceiro grau, e se ρ for uma constante dada, podemos definir uma nova função, composta de adição, multiplicação (quociente) e translação:

$$Q_\rho(f)(x) = \frac{\Delta_\rho(f)(x)}{\rho}$$

A função $\Delta_\rho(f)$ é do segundo grau.

4. Operadores *quociente* e *diferença* com polinômios de grau n.

(a) (V)[ ](F)[ ] Se f for um polinômio do grau n e se ρ for uma constante dada, podemos definir uma nova função

$$\Delta_\rho(f)(x) = \frac{f(x+\rho) - f(x)}{\rho}$$

A função $\Delta_\rho(f)(x)$ é de grau n.

(b) (V)[ ](F)[ ] Se f for um polinômio do grau n e se ρ for uma constante dada, podemos definir uma nova função

$$\Delta_\rho(f)(x) = \frac{f(x+\rho) - f(x)}{\rho}$$

A função $\Delta_\rho(f)(x)$ é de grau $n-1$.

(c) (V)[ ](F)[ ] Se f for um polinômio do grau n e se ρ for uma constante dada, podemos definir uma nova função

$$Q_\rho(f)(x) = \frac{\Delta_\rho(f)(x)}{\rho}$$

A função $Q_\rho(f)(x)$ é do grau $n-1$. Teste com gnuplot se é possível fazer um gráfico, isto comprova que a função foi definida.

(d) (V)[ ](F)[ ] Se f for um polinômio do grau n e se ρ for uma constante dada, podemos definir uma nova função

$$Q_\rho(f)(x) = \frac{\Delta_\rho(f)(x)}{\rho}$$

A função $Q_\rho(f)(x)$ é do grau n. Teste com gnuplot se é possível fazer um gráfico, isto comprova que a função foi definida.

(e) (V)[ ](F)[ ] Podemos dizer que os operadores diferença e quocientes produzem um decréscimo de uma unidade no grau da função obtida quando aplicada numa função polinomial de qualquer grau.

5. Operações algébricas e operador diferença

(a) (V)[ ](F)[ ] Se f, g forem duas funções contínuas, então

$$\Delta_\rho(f+g)(x) =$$
$$f(x+\rho) - f(x) + g(x+\rho) - g(x) =$$
$$\Delta_\rho(f)(x) + \Delta_\rho(g)(x)$$

provando que o operador diferença se distribue com a soma de funções. Propriedade distributiva do operador diferença relativamente à soma.

(b) (V)[ ](F)[ ] Se f, g forem duas funções contínuas, então

$$\Delta_\rho(fg) =$$
$$\Delta_\rho(f)\Delta(g)_\rho$$

provando que o operador diferença se distribue com o produto de funções. Propriedade distributiva do operador diferença relativamente à produto.

(c) (V)[ ](F)[ ] Se f, g forem duas funções contínuas, então

$$\Delta_\rho(fg)(x) =$$
$$f(x+\rho)g(x+\rho) - (f(x)g(x)) \neq$$
$$\Delta_\rho(f)(x)\Delta_\rho(g)(x)$$

provando que a operação diferença não distribui com o produto de funções, (distibutividade da diferença relativamente ao produto não vale)

(d) (V)[ ](F)[ ] Se f, g forem duas funções contínuas, então

$$\Delta_\rho(fg) =$$
$$= f(x+\rho)g(x+\rho) -$$
$$+f(x)g(x+\rho) +$$
$$+f(x)g(x+\rho) - f(x)g(x)$$

(e) (V)[ ](F)[ ] Se f, g forem duas funções contínuas, então

$$\mathbf{Q}_\rho(fg) = \frac{\Delta_\rho(fg)}{\rho} =$$
$$= \mathbf{Q}_\rho(f)(x)g(x) +$$
$$+f(x)\mathbf{Q}_\rho(g)(x)$$

provando que

$$(fg)'(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$$

a regra de derivação do produto de duas funções.

6. Use as regras *do produto de derivadas* e *da soma de derivadas* para calcular

$$f(x) = x^3; f'(x) = \ldots \quad (1)$$
$$f(x) = 4x^5; f'(x) = \ldots \quad (2)$$
$$f(x) = 5x^3 - 7x^2; f'(x) = ..(3)$$

7. A regra da cadéia A derivada da função composta,

$$h(x) = f(g(x));$$

(a) (V)[ ](F)[ ] Se f, g forem funções deriváveis, então

$$x \mapsto g(x) = y \mapsto f(g(x)) = z$$
$$Q_\rho(f(g(x)) = \frac{\Delta_\rho(f(g(x)))}{\rho} =$$
$$= \frac{f(g(x+\rho) - f(g(x))}{\rho}$$
$$\text{faça } \epsilon = g(x+\rho) - g(x) = y_1 - y_0$$
$$Q_\rho(f(g(x)) = \frac{f(g(x+\rho) - f(g(x))}{\epsilon}\frac{\epsilon}{\rho} =$$
$$= \frac{f(g(x+\rho) - f(g(x))}{g(x+\rho) - (g(x))}\frac{g(x+\rho) - (g(x))}{\rho}$$

(b) (V)[ ](F)[ ] Se f, g forem funções deriváveis, então

$$x \mapsto g(x) = y \mapsto f(g(x)) = z$$
$$Q_\rho(f(g(x)) = \frac{\Delta_\rho(f(g(x)))}{\rho} =$$
$$= \frac{f(g(x+\rho) - f(g(x))}{\rho}$$
$$\text{faça } \epsilon = g(x+\rho) - g(x) = y_1 - y_0$$
$$Q_\rho(f(g(x)) =$$
$$= \frac{f(g(x+\rho) - f(g(x))}{\epsilon g(x+\rho) - g(x)}\frac{\epsilon g(x+\rho) - g(x)}{\rho} =$$
$$= \frac{f(g(x+\rho) - f(g(x))}{g(x+\rho) - (g(x))}\frac{g(x+\rho) - (g(x))}{\rho}$$

(c) (V)[ ](F)[ ] Se f, g forem duas

funções deriváveis, então

$$x \mapsto g(x) = y \mapsto f(g(x)) = z$$
$$Q_\rho(f(g(x)) = \frac{\Delta_\rho(f(g(x)))}{\rho} =$$
$$= \frac{f(g(x+\rho)-f(g(x))}{\rho}$$

faça $\epsilon = g(x+\rho) - g(x) = (y+\epsilon) - y$

$$Q_\rho(f(g(x)) = \frac{f(y+\epsilon-y)}{\epsilon}\frac{\epsilon}{\rho} =$$
$$= \frac{f(y+\epsilon)-f(y)}{\epsilon}\frac{g(x+\rho)-(g(x))}{\rho}$$

provando que $f(g(x))' = f'(g(x))g'(x)$

(d) <u>(V)[ ](F)[ ]</u>

$$z = f(y) = y^3;$$
$$y = g(x) = x^4;$$

então

$$f(g(x))' = 7x^6$$

(e) <u>(V)[ ](F)[ ]</u>

$$z = f(y) = y^3;$$
$$y = g(x) = x^4;$$

então

$f(g(x))' = 3(x^4)^2 4x^3 = 12x^{11}$