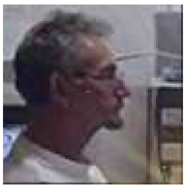

Cálculo I	**Gabarito da lista 14**
Teorema fundam. do Cálculo	tarcisio@member.ams.org
T. Praciano-Pereira	**Dep. de Computação**
Univ. Estadual Vale do Acaraú	3 de dezembro de 2009
página da disciplina	www.calculo.sobralmatematica.org
Documento produzido com LaTeX	sis. op. Debian/Gnu/Linux

1 Gabarito das questões

1. Média aritmética ponderada
   (a) (F)[F]
   (b) (V)[V]
   (c) (V)[V]
   (d) (F)[F]
   (e) (V)[V]
   (f) (F)[F]
2. Média aritmética ponderada
   (a) (F)[F]
   (b) (F)[F]
   (c) (V)[V]
   (d) (V)[V]
   (e) (V)[V]
   (f) (V)[V]
3. Soma de Riemann e média ponderada
   (a) (V)[V]
   (b) (V)[V]
   (c) (V)[V]
4. Valor intermediário ...
   (a) (V)[V]
   (b) (V)[V] Necessidade da continuidade...
   (c) (V)[V] Existe um número $\underline{c}$; $c \in [x, x + \Delta x]$ ...
   (d) (V)[V] Existe um número $\underline{c}$; $c \in [a, b]$ ...

(e) <u>(V)[V]</u> Existe um número <u>c</u>; $c \in [x, x+\Delta x]$ ...

5. <u>A notação de Leibniz</u> Valem as hipóteses e a notação da questão...

   (a) <u>(V)[V]</u> Se $F(x) = \int\limits_a^x f$ então...

   (b) <u>(V)[V]</u><u>Teorema Fundamental do Cálculo</u>

6. <u>Polinômio de Taylor</u> O polinômio ...

   (a) <u>(V)[V]</u> $a_0 = f(a)$

   (b) <u>(F)[F]</u> $a_0 = f'(a)$

   (c) <u>(F)[F]</u> $a_1 = f(a)$

   (d) <u>(V)[V]</u> $a_1 = f'(a)$

   (e) <u>(F)[F]</u> $a_2 = f(a)$

   (f) <u>(F)[F]</u> $a_2 = f''(a)$

   (g) <u>(V)[V]</u> $a_2 = 0.5f''(a)$

7. Na questão ...

   (a) <u>(F)[F]</u>

   (b) <u>(V)[V]</u>

   (c) <u>(F)[F]</u>

   (d) <u>(V)[V]</u>

8. <u>Polinômio de Taylor</u> O polinômio ...

   (a) <u>(V)[V]</u> $a_1 = f(a)$

   (b) <u>(V)[V]</u> $a_1 = f'(a)$

   (c) <u>(F)[F]</u> $a_2 = f'(a)$

   (d) <u>(V)[V]</u> $a_2 = \frac{f''(a)}{2}$

   (e) <u>(F)[F]</u> $a_3 = f'''(a)$

   (f) <u>(F)[F]</u> $a_3 = \frac{f''(a)}{2}$

   (g) <u>(V)[V]</u> $a_3 = \frac{f'''(a)}{3!}$

9. Na questão ....

   (a) <u>(F)[F]</u>

   (b) <u>(F)[F]</u>

   (c) <u>(V)[V]</u>

   (d) <u>(F)[F]</u>

   (e) <u>(V)[V]</u>

2 Notação de Leibniz

$$F'(x) = \tfrac{dF}{dx} \tag{1}$$

$$F(x) = \int\limits_a^b f(x)dx \tag{2}$$

Como $\Delta F_{\Delta x}(x)$ é o operador diferença então podemos escrever

$$F(x + \Delta x) - F(x) = f(c)\Delta x; c \in [x, x + \Delta x] \tag{3}$$

$$x := a; y := a + \Delta x = b; c \in [a, b] = [a, b] \tag{4}$$

$$F(y) - F(a) = f(c)(y - a) \tag{5}$$

$$z = F(y) = F(a) + f(c)(y - a) \tag{6}$$

$$z = F(a) + f(c)(y - a) \tag{7}$$

onde podemos ver na última equação uma expressão semelhante a equação da reta tangente ao gráfico de F no ponto $(a, F(a))$. O erro se encontra no coeficiente angular "$f(x)$". Como f é contínua, por hipótese então o limite quando $\Delta x = 0$ é $f(a) = F'(a)$ que nos dá equação da reta tangente.

$$z = F(a) + F'(a)(y - a)$$

As peças desta bonito quebra-cabeça se acomodam na notação de Leibniz.

Se F for derivável então o limite

$$\lim_{\Delta x=0} \frac{F(x + \Delta x) - F(x)}{\Delta x} = \frac{\Delta F}{\Delta x}$$

existe e é $F'(x)$. Se f for contínua $F'(x) = f(x)$. Como a diferença de quocientes pode ser escrita (notação)

$$\lim_{\Delta x=0} \frac{\Delta F}{\Delta x}$$

Leibniz estabeleceu a notação

$$\frac{dF}{dx} = F'(x) = f(x)$$

produzindo uma tremenda polêmica que passou pela invenção do conceito de *infinitesimal* para justicar esta notação.

Esta expressão é apenas uma notação, não precisa de nenhuma justificativa, aliás muito boa porque *funciona como se fosse uma fração.* Não é uma fração porque não existem as quantidades "dF" e "dx" para serem postas como numerador de denominador para o cálculo da derivada.

Para ver como é prática a Notação de Leibniz, a regra da cadéia pode ser colocado nos seguintes termos. Considere f, g diferenciáveis, então $F(x) = f(g(x))$ é também diferenciável e

$$F'(x) = \tfrac{dF}{dx} = f'(g(x))g'(x) \tag{8}$$
$$F'(x) = \tfrac{dF}{dx} = \tfrac{df}{dg}\tfrac{dg}{dx} \tag{9}$$

Observe que como $\frac{df}{dg}\frac{dg}{dx}$ não é um produto de frações não é possível fazer nenhum cancelamento e se ele for feito irá produzir um absurdo:

$$F'(x) = \frac{df}{dx}$$

A última equação está errada, as expressões corretas são:

$$z = F(x) = f(g(x)); z = f(y) = f(g(x)); y = g(x); \text{existe uma função } F; F'(x) = \frac{df}{dg}\frac{dg}{dx} \tag{10}$$
$$\text{não existe a função } F;\ \text{e } \frac{df}{dy} \tag{11}$$
$$\tag{12}$$

Uma consequência da notação de Leibniz surge na notação da integral. Temos a aproximação, com a soma de Riemann

$$[a,b] \overset{f}{\mapsto} \mathbf{R} \tag{13}$$
$$\sum_{k=0}^{n-1} f(x_k)\Delta x \approx \int_a^b f \tag{14}$$
$$\int_a^b f(x)dx \tag{15}$$
$$\int_\alpha^\beta f(g)dg \tag{16}$$
$$[\alpha,\beta] \overset{g}{\mapsto} [a,b] \overset{f}{\mapsto} \mathbf{R} \tag{17}$$

que se lê, na equação (15) “integral de f relativamente a x”. Porque podemos alterar o intervalo de integração “reparametrizando” a função f, o que significa calcular uma outra integral em que podemos ver a regra da cadéia, mas neste caso o hábito é dizer-se que a variável foi trocada e na equação (16), em que podemos ler “integral de f relativamente a g”, que neste caso é identificada como uma “mudança de variável”.