Cálculo I — **Lista número 14**
Teorema fundam. do Cálculo — tarcisio@member.ams.org
T. Praciano-Pereira — **Dep. de Computação**

alun@:

Univ. Estadual Vale do Acaraú	18 de novembro de 2009
página da disciplina	www.calculo.sobralmatematica.org
Documento produzido com LaTeX	sis. op. Debian/Gnu/Linux

1 Informações

Data da entrega da lista: dia 25, de Novembro, quarta-feira.

1.1 Objetivo

Esta lista tem dois tópicos como objetivo:

- Teorema fundamental do Cálculo.Entender média integral. Esta lista usa os instrumentos somas de Riemann, média aritmética ponderada e tem como objetivo a demonstração do Teorema Fundamental do Cálculo.
- Polinômio de Taylor. Um polinômio de grau n que é o melhor polinômio tangente ao gráfico de uma função. É a generalização da reta tangente.

Preciso que usem uma linguagem de programação para calcular somas de Riemann e verificar o valor aproximado das integrais, e os programas da série exer14*.calc se encontra na página, no link "programas" e podem ser usados com este objetivo. Este programas também foram usados na preparação desta lista.

No caso do Polinômio de Taylor os programas também vão mostrar graficamente o significado da aproximação local com estes polinômio do gráfico de uma função.

Palavras chave soma de Riemann, média, programação, valor aproximado da integral, média integral, teorema fundamental do Cálculo, polinômio de Taylor, desenvolvimento do seno e do coseno.

1.2 Avaliação do trabalho

Leia na página da disciplina a este respeito. Avalie o trabalho do professor.

2 Exercícios

1. Média aritmética ponderada
   (a) (V)[ ](F)[ ] Dados dois números A, B existe apenas uma média entre eles.
   (b) (V)[ ](F)[ ] O número A é uma possível média entre os números A, B.

   (c) (V)[ ](F)[ ] Dados os números A_1, A_2, A_3, A_4, A_5 e os pesos p_1, p_2, p_3, p_4, p_5 a combinação $p_1A_1+p_2A_2+p_3A_3+p_4A_4+p_5A_5$ é a média ponderada destes números, relativamente estes pesos, nesta ordem.
   (d) (V)[ ](F)[ ] $\frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}$ é uma lista de pesos.
   (e) (V)[ ](F)[ ] $\frac{2}{7}, \frac{3}{7}, \frac{2}{7}$ é uma lista de pesos.
   (f) (V)[ ](F)[ ] $\frac{-2}{7}, \frac{3}{7}, \frac{4}{7}$ é uma lista de pesos.

2. Média aritmética ponderada
   (a) (V)[ ](F)[ ] A soma de Riemann $\sum_{k=0}^{n-1} f(a+k\Delta x)\Delta x$ é uma média aritmética ponderada.
   (b) (V)[ ](F)[ ] A soma $\frac{1}{b-a}\sum_{k=0}^{n-1} f(a+k\Delta x)\Delta x$ é uma média aritmética ponderada.
   (c) (V)[ ](F)[ ]
   (d) (V)[ ](F)[ ] A soma $\frac{1}{b-a}\sum_{k=0}^{n-1} f(a+k\Delta x)\Delta x$ é uma média aritmética ponderada se $\Delta x = \frac{b-a}{n}$
   (e) (V)[ ](F)[ ] A soma $\frac{1}{b-a}\sum_{k=0}^{n-1} f(a+k\Delta x)\Delta x$, com $\Delta x = \frac{b-a}{n}$, determina um número situado entre $min(f)$ e $Max(f)$. Notação: $min(f)$ representa o menor valor de f no intervalo $[a, b]$ e $Max(f)$ representa o maior valor de f no intervalo $[a, b]$.
   (f) (V)[ ](F)[ ] Suponha que f seja uma função positiva, então o número $min(f)(b-a)$ é a área de um retângulo inscrito no gráfico de f sobre o intervalo $[a, b]$.
   (g) (V)[ ](F)[ ] Suponha que f seja uma função positiva, então o número $Max(f)(b-a)$ é a área de um retângulo que contém o gráfico de f sobre o intervalo $[a, b]$.

3. Soma de Riemann e média ponderada A integral $F(x) = \int_a^x f(t)$ define uma nova função, com auxílio da integral, relativamente a uma função f que vamos supor seja integrável. Suponha também que f seja integrável sobre um intervalo suficientemente grande para conter todos os valores envolvidos nesta questão.
   (a) (V)[ ](F)[ ] $F(x+h) - F(x)$ é o "pedaço de área" representado na figura (1) página 3, em que h é um número positivo.
   (b) (V)[ ](F)[ ] $\frac{F(x+h)-F(x)}{h}$ é o valor médio de f no intervalo $[x, x+h]$ em que h é um número positivo.

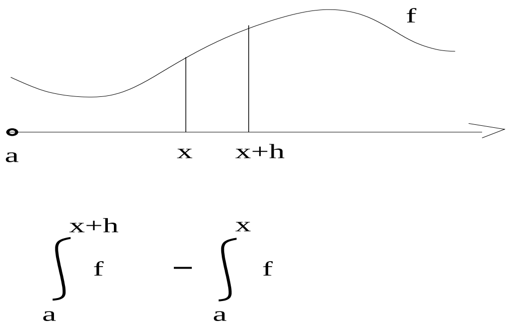

Figura 1: Variação no cálculo da integral

(c) (V)[ ](F)[ ] As funções contínuas são aquelas para as quais é verdade que

$$\lim_{h=0} \frac{F(x+h) - F(x)}{h} = F'(x) = f(x)$$

para qualquer $x \in [a, b]$ em que $[a, b]$ é o domínio de f.

4. Valor intermediário, mas usando $\Delta x \neq 0$ em vez de h para conduzí-l@s a uma notação famosa.

   (a) (V)[ ](F)[ ] Existe um número $\underline{c}$; $c \in [a, b]$ tal que $\frac{F(b)-F(a)}{b-a} = f(c)$. Ou seja, o valor médio de f é $f(c)$ para algum número $c \in [a, b]$.

   (b) (V)[ ](F)[ ]Necessidade da continuidade O gráfico na figura (2) página 4, mostra que se uma função f não for contínua o valor médio pode existir[1] mas não precisa coincidir com $f(c)$ para algum $\underline{c}$ do domínio da função.

   (c) (V)[ ](F)[ ] Existe um número $\underline{c}$; $c \in [x, x + \Delta x]$ tal que

   $$\frac{F(x + \Delta x) - F(x)}{\Delta x} = f(c)$$

   Ou seja, o valor médio de f é $f(c)$ para algum número $c \in [x, x+\Delta x]$.

   (d) (V)[ ](F)[ ] Existe um número $\underline{c}$; $c \in [a, b]$ tal que

   $$F(b) - F(a) = f(c)(b - a)$$

   (e) (V)[ ](F)[ ]
   Existe um número $\underline{c}$; $c \in [x, x + \Delta x]$ tal que $\Delta F_{\Delta x}(x) = f(c)\Delta x$.

[1] E no caso da figura (2) existe o valor médio.

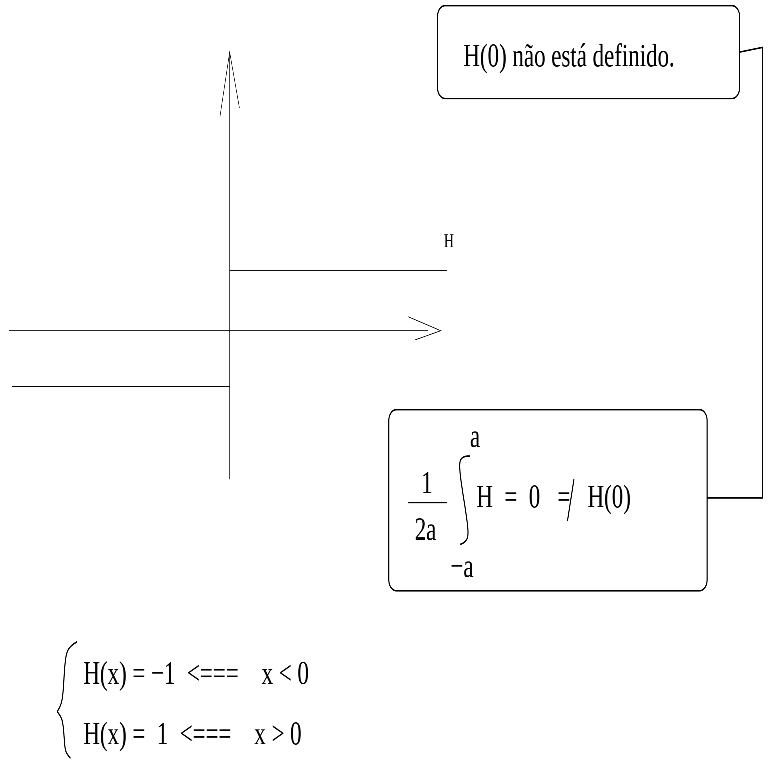

Figura 2: Valor médio de uma função descontínua

5. A notação de Leibniz Valem as hipóteses e a notação da questão 3, em particular que f é uma função contínua no intervalo $[a, b]$ mas usando $\Delta x \neq 0$ em vez de h para conduzí-l@s a uma notação famosa.

   (a) (V)[ ](F)[ ] Se $F(x) = \int_a^x f$ então o limite

   $$\lim_{\Delta x=0} \frac{F(x + \Delta x) - F(x)}{\Delta x}$$

   existe, é $F'(x) = f(x)$.

(b) (V)[ ](F)[ ]Teorema Fundamental do Cálculo

$$\int_p^q f = F(q) - F(p) \ ; \ p, q \in [a, b]$$

Notação de Leibniz

$$F'(x) = \frac{dF}{dx} \quad (1)$$

$$F(x) = \int_a^b f(x)dx \quad (2)$$

6. Polinômio de Taylor O polinômio

$$P(x) = a_0 + a_1(x-a) + a_2(x-a)^2$$

coincide com $f(x) = sin(\frac{x+4}{3})(x-3)$ no ponto ponto $a = 1$ de tal modo que

$$P(a) = f(a) \quad (3)$$

$$P'(a) = f'(a) \quad (4)$$

$$P''(a) = f''(a) \quad (5)$$

Então

(a) (V)[ ](F)[ ] $a_0 = f(a)$

(b) (V)[ ](F)[ ] $a_0 = f'(a)$

(c) (V)[ ](F)[ ] $a_1 = f(a)$

(d) (V)[ ](F)[ ] $a_1 = f'(a)$

(e) (V)[ ](F)[ ] $a_2 = f(a)$

(f) (V)[ ](F)[ ] $a_2 = f''(a)$

(g) (V)[ ](F)[ ] $a_2 = 0.5f''(a)$

Faça o gráfico de $f(x), P(x)$ com gnuplot mas use os comandos

```
set xrange [-3:3]
plot f(x),0,P(x)
pause -2
```

O programa `exer14_07.gnuplot` constroi este gráfico.

7. Na questão 6 você obteve, com `gnuplot`

(a) (V)[ ](F)[ ] o gráfico de uma reta tangente ao gráfico de $y = f(x)$ no ponto $(a, f(a))$.

(b) (V)[ ](F)[ ] o gráfico de uma parábola tangente ao gráfico de $y = f(x)$ no ponto $(a, f(a))$.

(c) (V)[ ](F)[ ] A expressão do polinômio do segundo grau cujo gráfico tangencia o gráfico de f no ponto $(a, f(a))$ é

$$P(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + f''(a)(x-a)^2$$

(d) (V)[ ](F)[ ] A expressão do polinômio do segundo grau cujo gráfico tangencia o gráfico de f no ponto $(a, f(a))$ é

$$P(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2}(x-a)^2$$

8. Polinômio de Taylor O polinômio

$$P(x) = a_0 + a_1(x-a) + a_2(x-a)^2 + a_3(x-a)^3$$

coincide com $f(x) = sin(\frac{x+4}{3})(x-3)$ no ponto ponto $a = 1$ de tal modo que

$$P(a) = f(a) \quad (6)$$

$$P'(a) = f'(a) \quad (7)$$

$$P''(a) = f''(a) \quad (8)$$

$$P'''(a) = f'''(a) \quad (9)$$

Então

(a) (V)[ ](F)[ ] $a_1 = f(a)$

(b) (V)[ ](F)[ ] $a_1 = f'(a)$

(c) (V)[ ](F)[ ] $a_2 = f'(a)$

(d) (V)[ ](F)[ ] $a_2 = \frac{f''(a)}{2}$

(e) (V)[ ](F)[ ] $a_3 = f'''(a)$

(f) (V)[ ](F)[ ] $a_3 = \frac{f''(a)}{2}$

(g) (V)[ ](F)[ ] $a_3 = \frac{f'''(a)}{3!}$

Faça o gráfico de $f(x), P(x)$ com gnuplot mas use os comandos

```
set xrange [-3:3]
plot f(x),0,P(x)
pause -2
```

O programa `exer14_08.gnuplot` constroi este gráfico.

9. Na questão 8 você obteve, com `gnuplot`

(a) (V)[ ](F)[ ] o gráfico de uma reta tangente ao gráfico de $y = f(x)$ no ponto $(a, f(a))$.

(b) (V)[ ](F)[ ] o gráfico de uma parábola tangente ao gráfico de $y = f(x)$ no ponto $(a, f(a))$.

(c) (V)[ ](F)[ ] o gráfico do melhor polinômiko do terceiro grau tangente ao gráfico de $y = f(x)$ no ponto $(a, f(a))$.

(d) (V)[ ](F)[ ] A expressão do polinômio do tericeiro grau cujo gráfico tangencia o gráfico de f no ponto $(a, f(a))$ é

$$P(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + f''(a)(x-a)^2 + f'''(a)(x-a)^2$$

(e) (V)[ ](F)[ ] A expressão do polinômio do terceiro grau cujo gráfico tangencia o gráfico de f no ponto $(a, f(a))$ é

$$P(x) = \frac{f(a)}{0!} + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \frac{f'''(a)}{3!}(x-a)^3$$