



Cálculo I  
Soma de Riemann, média  
T. Praciano-Pereira

Lista número 13  
tarcisio@member.ams.org  
Dep. de Computação

alun@:

Univ. Estadual Vale do Acaraú	9 de novembro de 2009
página da disciplina	www.calculo.sobralmatematica.org
Documento produzido com L <sup>A</sup> T <sub>E</sub> X	sis. op. Debian/Gnu/Linux

## 1 Informações

Data da entrega da lista: dia 17 de Novembro, terça-feira.

### 1.1 Objetivo

Estudo de médias e a média integral de uma função. A parábola tangente a um gráfico.

**Palavras chave** Derivada da função inversa, média integral, parábola tangente, média aritmética ponderada, pesos, operador quociente de primeira ordem, operador quociente de segunda ordem.

### 1.2 Avaliação do trabalho

Leia na página da disciplina a este respeito.

## 2 Exercícios

1. Soma de Riemann Para calcular aproximadamente uma integral eu posso usar uma soma de Riemann. Identifique a soma que calcula corretamente uma aproximação para a integral com  $\Delta x = \frac{b-a}{n}$  em que  $a, b$  são os extremos da intervalo e  $n$  é o número de subdivisões deste intervalo.

(a)  $\underline{(V)}[\ ](\underline{F})[\ ] \int_a^b f \approx \sum_{k=1}^{n-1} f(a+k\Delta x)\Delta x$

(b)  $\underline{(V)}[\ ](\underline{F})[\ ] \int_a^b f \approx \sum_{k=0}^{n-1} f(a+k\Delta x)$

(c)  $\underline{(V)}[\ ](\underline{F})[\ ] \int_a^b f \approx \sum_{k=1}^n f(a+k\Delta x)\Delta x$

(d)  $\underline{(V)}[\ ](\underline{F})[\ ] \int_a^b f \approx \sum_{k=1}^n f(a+k\Delta x)$

(e)  $\underline{(V)}[\ ](\underline{F})[\ ] \int_a^b f \approx \sum_{k=0}^{n-1} f(a+k\Delta x)\Delta x$

(f)  $\underline{(V)}[\ ](\underline{F})[\ ] \int_a^b f \approx \Delta x \sum_{k=0}^{n-1} f(a+k\Delta x)$

### 2. Médias - aritmética simples e ponderada

(a)  $\underline{(V)}[\ ](\underline{F})[\ ]$  A média entre dois números  $P, Q$  é qualquer número  $M$  tal que  $P \leq M \leq Q$ .

(b)  $\underline{(V)}[\ ](\underline{F})[\ ]$  A média entre dois números  $P, Q$  é um único número  $M$  tal que  $M = \frac{P+Q}{2}$ .

(c)  $\underline{(V)}[\ ](\underline{F})[\ ]$  Se  $s_1 + s_2 + s_3 + s_4 = 1$  então  $s_1p_1 + s_2p_2 + s_3p_3 + s_4p_4$  é uma média entre os números  $p_1, p_2, p_3, p_4$  relativamente aos pesos  $s_1, s_2, s_3, s_4$ .

(d)  $\underline{(V)}[\ ](\underline{F})[\ ]$  Se  $s_1 + s_2 + s_3 + s_4 = 1$  tal que  $s_i \geq 0$  então

$$s_1p_1 + s_2p_2 + s_3p_3 + s_4p_4$$

é uma média entre os números  $p_1, p_2, p_3, p_4$  relativamente aos pesos  $s_1, s_2, s_3, s_4$ , tomados nesta ordem, chamada "média aritmética ponderada".

### 3. Soma de Riemann e média

Notação:

$$\Delta x = \frac{b-a}{n} \tag{1}$$

$$x_0 = a, x_1 = a + \Delta x, \dots \tag{2}$$

$$\dots x_k = a + k\Delta x \dots \tag{3}$$

$$\dots x_n = a + n\Delta x = b \tag{4}$$

Então

(a)  $\underline{(V)}[\ ](\underline{F})[\ ] \sum_{k=1}^n f(x_k)\Delta x$  é uma soma de Riemann para  $f$  no intervalo  $[a, b]$ .

(b)  $\underline{(V)}[\ ](\underline{F})[\ ] \sum_{k=0}^{n-1} f(x_k)\Delta x$  é uma soma de Riemann para  $f$  no intervalo  $[a, b]$ .

(c)  $\underline{(V)}[\ ](\underline{F})[\ ] \sum_{k=0}^{n-1} \Delta x = b - a$

(d)  $\underline{(V)}[\ ](\underline{F})[\ ] \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f(a+k\Delta x)\Delta x$  é uma média aritmética ponderada de uma seleção uniforme de valores de  $f$  no intervalo  $[a, b]$ .

(e)  $\underline{(V)}[\ ](\underline{F})[\ ] \frac{1}{b-a} \sum_{k=0}^{n-1} f(a+k\Delta x)\Delta x$  é uma média aritmética ponderada de uma seleção uniforme de valores de  $f$  no intervalo  $[a, b]$ .

- (f)  $\frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx$  Como uma soma de Riemann relativa ao intervalo  $[a, b]$  é uma aproximação para a integral de uma função neste intervalo então  $\frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx$  é um valor médio de  $f$  no intervalo  $[a, b]$  chamado “valor médio integral de  $f$  no intervalo  $[a, b]$ ”.

#### 4. A derivada da função inversa

Se

$$f(x) = \text{Atan}(x) \quad (5)$$

$$y = g(x) = \tan(x) \quad (6)$$

então  $f(g(x)) = x$  portanto  $f, g$  é um par de funções inversas.

- (a)  $(f(g(x)))' = f'(g(x))g'(x)$   
 (b)  $(f(g(x)))' = f'(g(x))g'(x)$   
 (c)  $(f(g(x)))' = (x)' = 1$   
 (d)  $f'(g(x)) = \frac{1}{g'(x)}$   
 (e)  $f'(g(x)) = \frac{1}{g'(x)}$   
 (f)  $g'(x) = \frac{1}{\cos^2(x)}$   
 (g)  $\cos(x) = \frac{1}{\sqrt{1+y^2}}$  De acordo com a figura (1) página 4, portanto  $f'(y) = \frac{1}{1+y^2}$ .  
 (h)  $\cos^2(x) = \frac{1}{1+y^2}$  De acordo com a figura (1) página 4, portanto  $f'(y) = \frac{1}{1+y^2}$ .

#### 5. A parábola tangente O polinômio

$$P(x) = a_0 + a_1(x - a) + a_2(x - a)^2$$

coincide com  $f(x) = 2\sin(3x + 4)$  no ponto  $a = 1$  de tal modo que  $P'(a) = f'(a)$  e  $P''(a) = f''(a)$ . Então

- (a)  $a_0 = f(a)$   
 (b)  $a_0 = f'(a)$   
 (c)  $a_1 = f(a)$   
 (d)  $a_1 = f'(a)$   
 (e)  $a_2 = f(a)$   
 (f)  $a_2 = f''(a)$   
 (g)  $a_2 = \frac{1}{2}f''(a)$

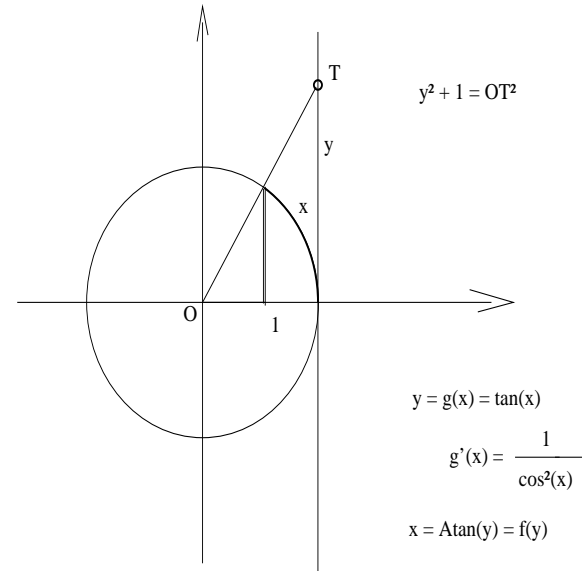


Figura 1: O arco cuja tangente é  $x$

Faça o gráfico de  $f(x), P(x)$  com gnuplot mas use os comandos que se encontram a seguir. Observe que estou usando derivadas aproximadas de primeira e segunda ordem (os operadores quociente de primeira e segunda ordem).

```
a = 2 ## trocando este valor você pode obter a parábola em outros pontos.
f(x) = 2*sin(3*x + 4) ;
rho = 0.00001;
Q_rho_f(x) = (f(x+rho)-f(x))/rho; # operador quociente
Q2_rho_f(x) = (Q_rho_f(x+rho) - Q_rho_f(x))/rho # op. quoc. de segunda ordem
a0 = f(a); a1 = Q_rho_f(a); a2 = Q2_rho_f(a);
P(x) = a0 + a1*(x-a) + 0.5*a2*(x-a)**2;
set xrange [0:3]
set yrange [-3:3]
plot f(x), P(x)
pause -2
```

#### 6. Na questão 5 você obteve, com gnuplot

- (a)  $\frac{1}{1+y^2}$  o gráfico de uma reta tangente ao gráfico de  $y = f(x)$  no ponto  $(a, f(a))$ .

(b)  $\underline{(V)}[\ ](\underline{F})[\ ]$  o gráfico de uma parábola tangente ao gráfico de  $y = f(x)$  no ponto  $(a, f(a))$ .

(c)  $\underline{(V)}[\ ](\underline{F})[\ ]$  A expressão do polinômio do segundo grau cujo gráfico tangencia o gráfico de  $f$  no ponto  $(a, f(a))$  é

$$P(x) = f(a) + f'(a)(x - a) + f''(a)(x - a)^2$$

(d)  $\underline{(V)}[\ ](\underline{F})[\ ]$  A expressão do polinômio do segundo grau cujo gráfico tangencia o gráfico de  $f$  no ponto  $(a, f(a))$  é

$$P(x) = f(a) + f'(a)(x - a) + \frac{f''(a)}{2}(x - a)^2$$

(e)  $\underline{(V)}[\ ](\underline{F})[\ ]$  Uma das fórmulas acima generaliza a fórmula da reta tangente ao gráfico de  $f$  para obtermos o gráfico da parábola tangente ao gráfico de  $f$ . Esta fórmula vai nos permitir de calcular o ponto de queda de uma pedra que se encontrava rodando presa a um cordão e que se “liberou” quando o cordão se partiu.

Eu disse, numa das primeiras aulas, que ainda poderíamos calcular o ponto de queda da pedra depois de quebrado o cordão... falta um detalhe para podermos calcular, é a derivada da equação do círculo que vai ser assunto da próxima lista. Não percam!