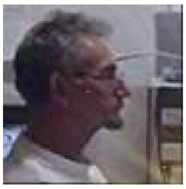

Cálculo I | **Lista número 13**
Soma de Riemann, média | tarcisio@member.ams.org
T. Praciano-Pereira | **Dep. de Computação**

alun@:

Univ. Estadual Vale do Acaraú	9 de novembro de 2009
página da disciplina	www.calculo.sobralmatematica.org
Documento produzido com LaTeX	sis. op. Debian/Gnu/Linux

1 Informações

Data da entrega da lista: dia 17 de Novembro, terça-feira.

1.1 Objetivo

Estudo de médias e a média integral de uma função. A parábola tangente a um gráfico.

Palavras chave Derivada da função inversa, média integral, parábola tangente, média aritmética ponderada, pesos, operador quociente de primeira ordem, operador quociente de segunda ordem.

1.2 Avaliação do trabalho

Leia na página da disciplina a este respeito.

2 Exercícios

1. Soma de Riemann Para calcular aproximadamente uma integral eu posso usar uma soma de Riemann. Identifique a soma que calcula corretamente uma aproximação para a integral com $\Delta x = \frac{b-a}{n}$ em que a, b são os extremos da intervalo e n é o número de subdivisões deste intervalo.

   (a) (V)[ ](F)[ ] $\int_a^b f \approx \sum_{k=1}^{n-1} f(a + k\Delta x)\Delta x$

   (b) (V)[ ](F)[ ] $\int_a^b f \approx \sum_{k=0}^{n-1} f(a + k\Delta x)$

   (c) (V)[ ](F)[ ] $\int_a^b f \approx \sum_{k=1}^{n} f(a + k\Delta x)\Delta x$

   (d) (V)[ ](F)[ ] $\int_a^b f \approx \sum_{k=1}^{n} f(a + k\Delta x)$

   (e) (V)[ ](F)[ ] $\int_a^b f \approx \sum_{k=0}^{n-1} f(a + k\Delta x)\Delta x$

(f) (V)[ ](F)[ ] $\int_a^b f \approx \Delta x \sum_{k=0}^{n-1} f(a + k\Delta x)$

2. Médias - aritmética simples e ponderada

   (a) (V)[ ](F)[ ] A média entre dois números P, Q é qualquer número M tal que $P \leq M \leq Q$.

   (b) (V)[ ](F)[ ] A média entre dois números P, Q é um único número M tal que $M = \frac{P+Q}{2}$.

   (c) (V)[ ](F)[ ] Se $s_1 + s_2 + s_3 + s_4 = 1$ então $s_1p_1 + s_2p_2 + s_3p_3 + s_4p_4$ é uma média entre os números p_1, p_2, p_3, p_4 relativamente aos pesos s_1, s_2, s_3, s_4 .

   (d) (V)[ ](F)[ ] Se $s_1 + s_2 + s_3 + s_4 = 1$ tal que $s_i \geq 0$ então

   $$s_1p_1 + s_2p_2 + s_3p_3 + s_4p_4$$

   é uma média entre os números p_1, p_2, p_3, p_4 relativamente aos pesos s_1, s_2, s_3, s_4, tomados nesta ordem, chamada "*média aritmética ponderada*".

3. Soma de Riemann e média

   Notação:

   $$\Delta x = \frac{b-a}{n} \quad (1)$$
   $$x_0 = a, x_1 = a + \Delta x, \ldots \quad (2)$$
   $$\ldots x_k = a + k\Delta x \ldots \quad (3)$$
   $$\ldots x_n = a + n\Delta x = b \quad (4)$$

   Então

   (a) (V)[ ](F)[ ] $\sum_{k=1}^{n} f(x_k)\Delta x$ é uma soma de Riemann para f no intervalo $[a, b]$.

   (b) (V)[ ](F)[ ] $\sum_{k=0}^{n-1} f(x_k)\Delta x$ é uma soma de Riemann para f no intervalo $[a, b]$.

   (c) (V)[ ](F)[ ] $\sum_{k=0}^{n-1} \Delta x = b - a$

   (d) (V)[ ](F)[ ] $\frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f(a + k\Delta x)\Delta x$ é uma média aritmética ponderada de uma seleção uniforme de valores de f no intervalo $[a, b]$.

   (e) (V)[ ](F)[ ] $\frac{1}{b-a} \sum_{k=0}^{n-1} f(a+k\Delta x)\Delta x$ é uma média aritmética ponderada de uma seleção uniforme de valores de f no intervalo $[a, b]$.

(f) (V)[ ](F)[ ] Como uma soma de Riemann relativa ao intervalo $[a, b]$ é uma aproximação para a integral de uma função neste intervalo então $\frac{1}{b-a}\int_a^b f$ é um valor médio de f no intervalo $[a.b]$ chamado "valor médio integral de f no intervalo $[a, b]$.

4. A derivada da função inversa

Se

$$f(x) = Atan(x) \tag{5}$$
$$y = g(x) = \tan(x) \tag{6}$$

então $f(g(x)) = x$ portanto f, g é um par de funções inversas.

(a) (V)[ ](F)[ ] $(f(g(x)))' = f(g'(x))g(x)$

(b) (V)[ ](F)[ ] $(f(g(x)))' = f'(g(x))g'(x)$

(c) (V)[ ](F)[ ] $(f(g(x)))' = (x)' = 1$

(d) (V)[ ](F)[ ] $f'(g(x)) = \frac{1}{g(x)}$

(e) (V)[ ](F)[ ] $f'(g(x)) = \frac{1}{g'(x)}$

(f) (V)[ ](F)[ ] $g'(x) = \frac{1}{cos^2(x)}$

(g) (V)[ ](F)[ ] De acordo com a figura (1) página 4, $cos(x) = \frac{1}{1+y^2}$ portanto $f'(y) = \frac{1}{1+y^2}$.

(h) (V)[ ](F)[ ] De acordo com a figura (1) página 4, $cos^2(x) = \frac{1}{1+y^2}$ portanto $f'(y) = \frac{1}{1+y^2}$.

5. A parábola tangente O polinômio

$$P(x) = a_0 + a_1(x - a) + a_2(x - a)^2$$

coincide com $f(x) = 2sin(3x + 4)$ no ponto ponto $a = 1$ de tal modo que $P'(a) = f'(a)$ e $P''(a) = f''(a)$. Então

(a) (V)[ ](F)[ ] $a_0 = f(a)$

(b) (V)[ ](F)[ ] $a_0 = f'(a)$

(c) (V)[ ](F)[ ] $a_1 = f(a)$

(d) (V)[ ](F)[ ] $a_1 = f'(a)$

(e) (V)[ ](F)[ ] $a_2 = f(a)$

(f) (V)[ ](F)[ ] $a_2 = f''(a)$

(g) (V)[ ](F)[ ] $a_2 = \frac{1}{2}f''(a)$

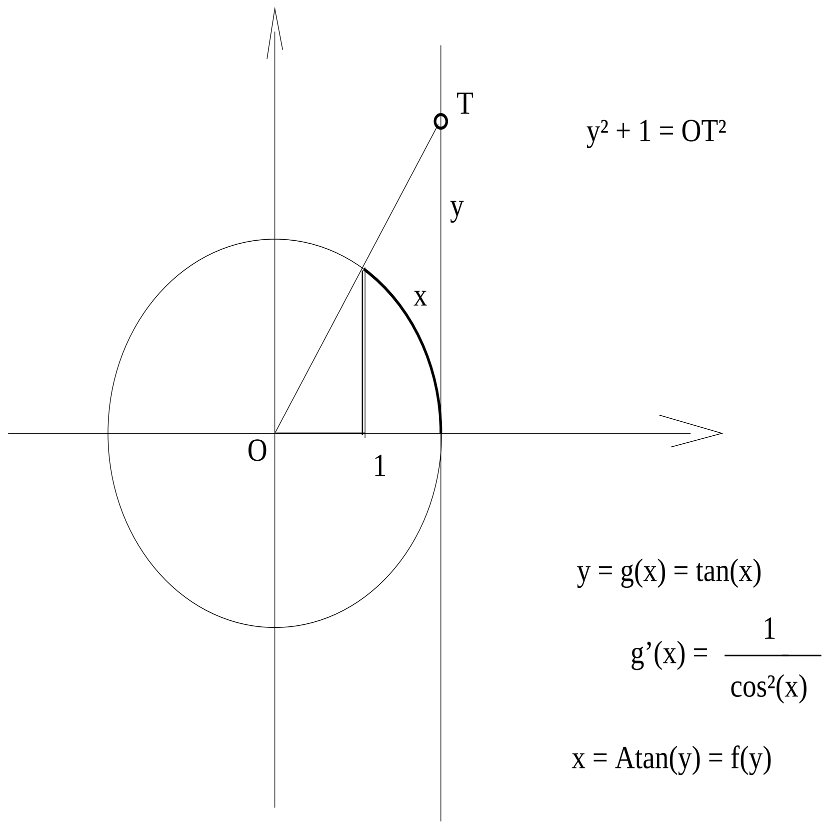

Figura 1: O arco cuja tangente é x

Faça o gráfico de $f(x), P(x)$ com gnuplot mas use os comandos que se encontram a seguir. Observe que estou usando derivadas aproximadas de primeira e segunda ordem (os operadores quociente de primeira e segunda ordem).

```
a = 2 ## trocando este valor você pode obter a parábola em outros pontos.
f(x) = 2*sin(3*x + 4) ;
rho = 0.00001;
Q_rho_f(x) = (f(x+rho)-f(x))/rho; # operador quociente
Q2_rho_f(x) = (Q_rho_f(x+rho) - Q_rho_f(x))/rho # op. quoc. de segunda ordem
a0 = f(a); a1 = Q_rho_f(a); a2 = Q2_rho_f(a);
P(x) = a0 + a1*(x-a) + 0.5*a2*(x-a)**2;
set xrange [0:3]
set yrange [-3:3]
plot f(x),0, P(x)
pause -2
```

6. Na questão 5 você obteve, com `gnuplot`

   (a) (V)[ ](F)[ ] o gráfico de uma reta tangente ao gráfico de $y = f(x)$ no ponto $(a, f(a))$.

(b) (V)[ ](F)[ ] o gráfico de uma parábola tangente ao gráfico de $y = f(x)$ no ponto $(a, f(a))$.

(c) (V)[ ](F)[ ] A expressão do polinômio do segundo grau cujo gráfico tangencia o gráfico de f no ponto $(a, f(a))$ é

$$P(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + f''(a)(x-a)^2$$

(d) (V)[ ](F)[ ] A expressão do polinômio do segundo grau cujo gráfico tangencia o gráfico de f no ponto $(a, f(a))$ é

$$P(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2}(x-a)^2$$

(e) (V)[ ](F)[ ] Uma das fórmulas acima generaliza a fórmula da reta tangente ao gráfico de f para obtermos o gráfico da parábola tangente ao gráfico de f. Esta fórmula vai nos permitir de cálcular o ponto de queda de uma pedra que se encontrava rodando presa a um cordão e que se "liberou" quando o cordão se partiu.

Eu disse, numa das primeiras aulas, que ainda poderiamos calcular o ponto de queda da pedra depois de quebrado o cordão... falta um detalhe para podermos calcular, é a derivada da equação do círculo que vai ser assunto da próxima lista. Não percam!