Cálculo I	**gabarito da lista 11**
Revisão e treinamento	tarcisio@member.ams.org
T. Praciano-Pereira	**Dep. de Computação**
Univ. Estadual Vale do Acaraú	30 de novembro de 2009
página da disciplina	www.calculo.sobralmatematica.org
Documento produzido com LaTeX	sis. op. Debian/Gnu/Linux

1 Exercícios

1. A Física diz que a *velocidade* ...
   (a) (F)[F]
   (b) (V)[V]
   (c) (V)[V]
   (d) (V)[V] - O movimento em queda livre.

2. A função de Fibonacci ...

$$\begin{cases} s_0 = 0 \\ s_1 = 1 \\ n \geq 2 \ \Rightarrow \ s_n = s_{n-1} + s_{n-2} \end{cases} \tag{1}$$

   (a) (F)[F] $s_3 = 4$
   (b) (V)[V] $s_3 = 2$
   (c) (V)[V] $s_5 = 5$
   (d) (F)[F] $s_5 = 6$
   (e) (F)[F] $s_{10} = 100$
   (f) (V)[V] $s_{10} = 55$

3. Indução finita e lógica Uma função definida sobre o conjunto $\mathbf{R}$ tem a propriedade

$$\forall x, y \in \mathbf{R}; \ f(x+y) + f(x-y) = 2f(x)f(y) \tag{2}$$

Esta questão[1] representa um pequeno problema de Álgebra, leia, *de raciocínio lógico*, que merece mais atenção do que esta lista de exercícios lhe parece atribuir. Vou corrigir isto com observações que farei nas resoluções abaixo.

[1]Modificada usando uma questão do livro *Analyse*, autores *Raymond Couty* e *Jazcques Ezra*, collection U, editora Armand Colin, 1965 - página 128.

   (a) (V)[V] $f(0)$ pode valer 0
   (b) (V)[V] $f(0)$ pode valer 1.
   (c) (V)[V] faça $x = 0$ então

$$f(0) = 1 \implies f(y) + f(-y) = 2f(y) \implies f(y) = f(-y)$$

   (d) (V)[V] faça $x = 0$

$$f(0) = 0 \implies f(y) + f(-y) = 0 \implies f(y) = -f(-y)$$

Observação 1 *Função par, ou impar*
As duas hipóteses iniciais sobre f são muito mais amplas do que parecem:
Se não valer 3a então vale 3b ou reciprocamente.
Porque, como $f(0)$ existe, fazendo $x = y = 0$ somos levados aos cálculos

$$f(0) + f(0) = 2f(0)^2 \equiv 2f(0) = 2f(0)^2 \tag{3}$$
$$\textit{chame } X := f(0) \tag{4}$$
$$2X = 2X^2 \equiv X - X^2 = 0 \equiv X \in \{0, 1\} \tag{5}$$

Mostrando que é verdadeira a relação ($f(0) == 0$ ou $f(0) == 1$).
Quer dizer que f, necessariamente, é par **ou** *impar, se condição definidora da equação (2) valer. O "***ou***" é* exclusivo *porque a função somente pode ter um valor num ponto.*
f será par ou impar, dependendo do valor de $f(0)$, e esta condição será importante em alguns do itens seguintes.
Suponha que $f(a)$ seja conhecido ... Faça

$$x = y := a \textit{ e depois } x = -y := a$$

$$x = y = a \implies f(2a) + f(0) = 2f(a)^2; \tag{6}$$
$$x = -y \implies f(2a) + f(0) = 2f(a)f(-a); \tag{7}$$
$$\textit{subtraindo, calcula-se } f(-a) : 2f(a)^2 - 2f(a)f(-a) = 0; \tag{8}$$
$$x = 0, y = a \implies f(a) + f(-a) = 2f(0)f(a) \textit{ calcula-se } f(0); \tag{9}$$

entretanto é preciso que $f(a) \neq 0$ para que se possa calcular $f(-a)$.
Uma outra alternativa vem da equação (6) que vou escrever de forma pouco tradicional...

$$f(2a) + f(0) \in \{f(2a), f(2a) + 1\} = 2f(a)^2 \tag{10}$$
$$f(2a) \in \{2f(a)^2, 2f(a)^2 - 1\} \tag{11}$$

que mostra que $f(2a)$ pode ser calculado independentemente de que o valor de $f(a)$ seja ou não zero. Tornando a opção (f) também falsa por um erro de sinal, deveria ser:

$$f(2a) + f(0) = 2f(a)f(-a) \quad \Rightarrow \tag{12}$$
$$\Rightarrow \quad f(2a) + f(0) \in \{2f(a)^2 - 1, 2f(a)^2\} \tag{13}$$

Novamente o valor é único, na equação (11), depende do escolhido para $f(0)$.

O item (h) sai por indução finita com a redação "sendo conhecidos todos os valores para $f(ka); k < n$ " para a hipótese de indução finita.

Considere agora $x = (n-1)a, y = a$ e aplique a relação fundamental da equação (2)

$$x = (n-1)a; y = a \tag{14}$$
$$f(na) = f(x+y) + f(x-y) = 2f(x)f(y) \tag{15}$$
$$f(na) = 2f(x)f(y) - f(x-y) = 2(f((n-1)a)f(a) \tag{16}$$

que faz (h) verdadeiro.

A escolha do valor de $f(0)$ decide se f será par *ou* impar *e consequentemente qual é o valor de $f(-a)$ como consequência do valor de $f(a)$ se este valor for conhecido, o que torna a opção (i) verdadeira.*

(e) (F)[F] Estude a observação.

(f) (F)[F] Estude a observação, $f(2a)$ pode ser calculado mas o valor fornecido está errado.

(g) (V)[V] Porque $f(2a)$ pode ser calculado.

(h) (V)[V] ... podemos calcular $f(na)$... Estude a observação.

(i) (V)[V] Estude a observação.

4. Na figura (1) página 4, temos a equaçao da velocidade, $y = v(t)$ de um corpo ao longo do tempo.

   (a) (V)[V]

   (b) (F)[F] equação errada

   (c) (V)[ ](F)[ ] grau errado!

   (d) (V)[V]

   (e) (V)[V]

   (f) (V)[V]

   (g) (V)[V]

   (h) (F)[F] $m < 0$ a parábola teria a abertura para baixo.

   (i) (V)[V]

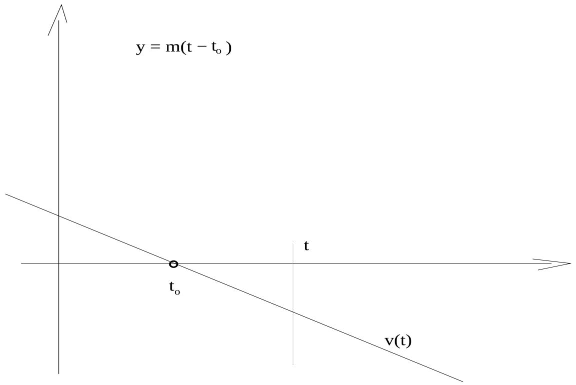

Figura 1: equaçao da velocidade

   (j) (F)[F]

   (k) (V)[V]

5. Corpo em queda livre

   (a) (F)[F]

   (b) (V)[V]
   Na figura (**??**), no ponto t_0 a velocidade é zero.

   (c) (F)[F]

   (d) (V)[V]

   (e) (V)[V]

   (f) (F)[F]

   (g) (V)[V]

6. derivadas

   (a) (F)[F]

   (b) (V)[V]

   (c) (F)[F]

   (d) (V)[V]

   (e) (V)[V]

   (f) (F)[F]

7. Gráficos

   (a) (F)[F]

(b) (F)[F]

(c) (F)[F]

(d) (V)[V]

(e) (F)[F]

(f) (V)[V]