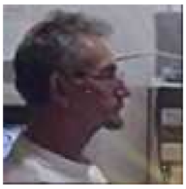

Calculo I	**Gabarito da lista 09**
Aplicações da derivada	tarcisio@member.ams.org
T. Praciano-Pereira	**Dep. de Computação**
Univ. Estadual Vale do Acaraú	30 de novembro de 2009
página da disciplina	www.calculo.sobralmatematica.org
Documento produzido com LaTeX	sis. op. Debian/Gnu/Linux

1 Exercícios

1. Faça o gráfico da função $y = f(x) = x^2 + 5x + 6$ detatalhadamente, explicando todas as passagens com uso da derivada.

   Solução 1 *A derivada, $f'(x)$ e o gráfico de $y = f(x)$ se encontram na figura Na figura (1) página 1,*

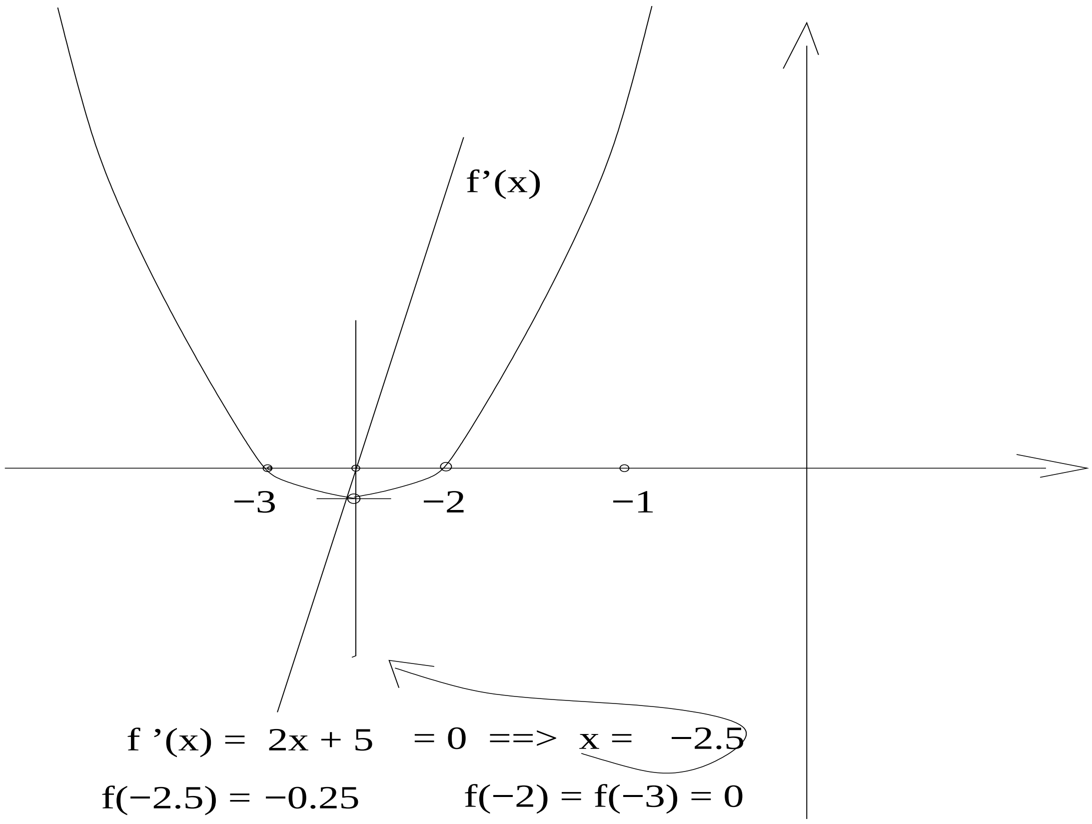

Figura 1: Gráfico da parábola

$$f'(x) = 2x + 5 \quad \Rightarrow \quad f'(x) = 0; x \in \{-2.5\} \tag{1}$$
$$f'(x) < 0 \quad \Rightarrow \quad x < -2.5; f'(x) > 0 \quad \Rightarrow \quad x > -2.5 \tag{2}$$
$$f \;\; \textit{é crescente na semi-reta } x > -2.5 \tag{3}$$
$$f \;\; \textit{é decrescente na semi-reta } x < -2.5 \tag{4}$$
$$f \;\; \textit{tem ponto de mínimo quando } x = -2.5 \tag{5}$$

2. Calcule a derivada da função $y = g(x) = \frac{1}{1+x^2}$ e depois faça o gráfico desta função cuidadosamente, explicando todas as passagens.

   Solução 2 *A figura (2) página 2, mostrar o gráfico da parábola* $y = 1 + x^2$*, do seu inverso multiplicativo,* $\frac{1}{1+x^2}$ *cuja derivada é* $\frac{2x}{(1+x^2)^2}$

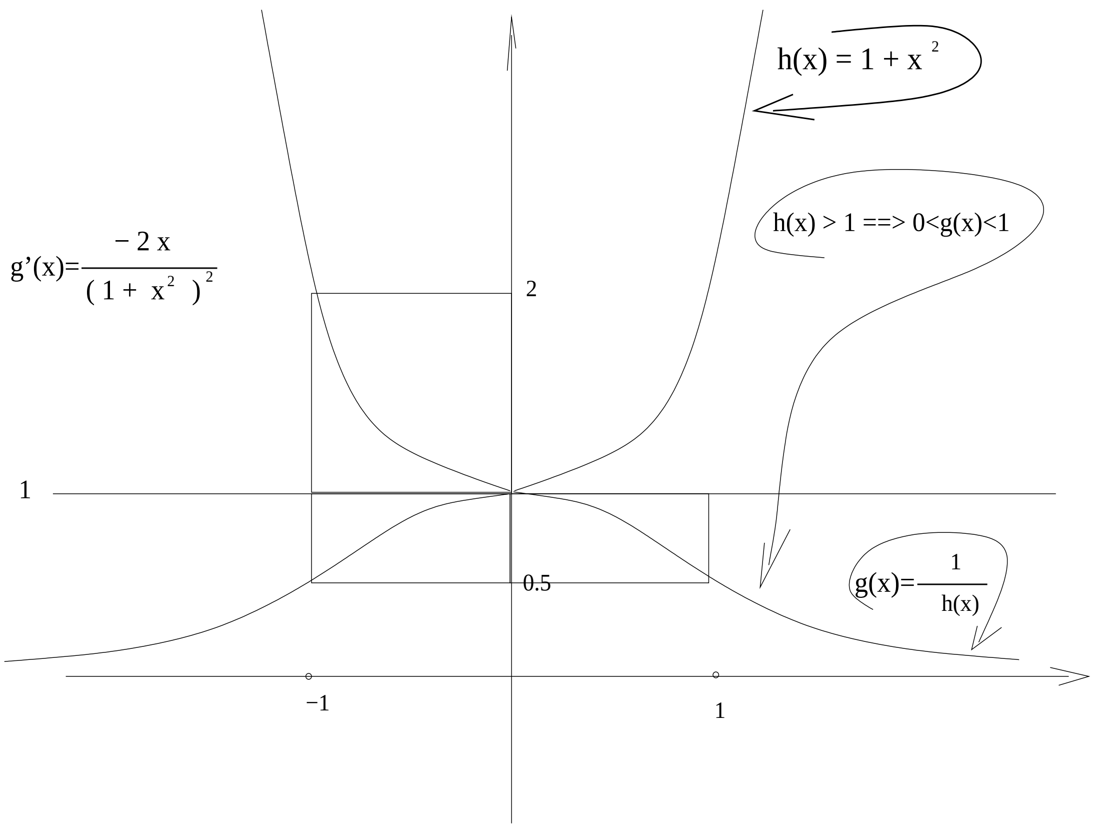

Figura 2: o inverso da parábola $y = g(x)$, feito à mão

$$h(x) = 1 + x^2 \tag{6}$$
$$g'(x) = \frac{2x}{(1+x^2)^2} < 0 \quad \Leftarrow \quad x > 0 \;\; g \textit{ é decrescente} \tag{7}$$
$$g'(x) = \frac{2x}{(1+x^2)^2} = 0 \quad \Leftarrow \quad x = 0 \;\; g \textit{ tem tangente horizontal} \tag{8}$$
$$g(0) = 1 \tag{9}$$
$$g'(x) = \frac{2x}{(1+x^2)^2} > 0 \quad \Leftarrow \quad x < 0 \;\; g \textit{ é crescente0} \tag{10}$$

g é crescente na semi-reta $x < 0$, é decrescente na semi-reta $x > 0$, é derivável, com derivada nula apenas em $x = 0$ onde tangencia a reta $y = 1$.

O gráfico na figura (3) página 3 foi feito com `gnuplot`.

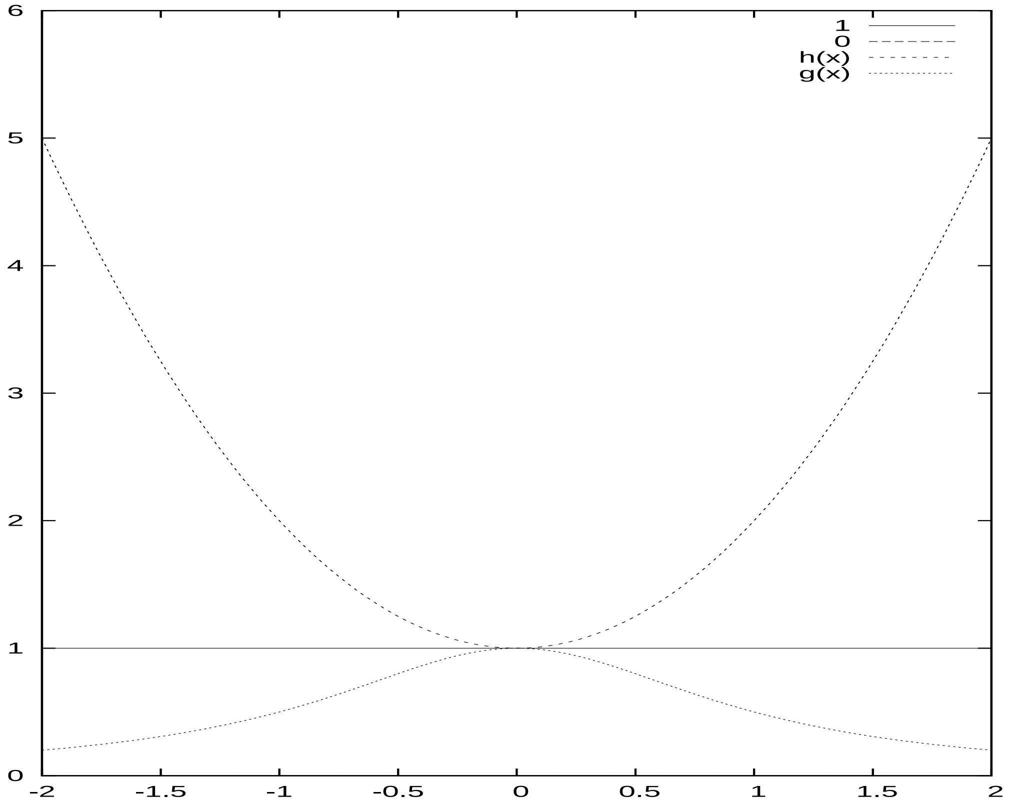

Figura 3: `gnuplot`: o inverso da parábola $y = g(x)$

3. Calcule a derivada da função $y = r(x) = \frac{2x}{1+x^2}$ e depois faça o gráfico desta função cuidadosamente, explicando todas as passagens.

Solução 3

$$r'(x) = \frac{2(1-x^2}{(1+x^2)^2} \tag{11}$$
$$r'(x) > 0 \quad \Leftarrow \quad x \in [-1,1] \tag{12}$$
$$r(x) \textit{ é crescente } x \in [-1,1] \tag{13}$$
$$r(x) \textit{ é decrescente } x \notin [-1,1] \tag{14}$$
$$x > 0 \quad \Rightarrow \quad |1+x^2| = 1+x^2 > |2x| = 2x \tag{15}$$
$$x > 0 \quad \Rightarrow \quad 1+x^2 > 2x \equiv 1-2x+x^2 = (1-x)^2 \geq 0 \tag{16}$$
$$x > 0 \quad \Rightarrow \quad |1+x^2| > |2x| \quad \Rightarrow \quad r(x) \in [0,1] \tag{17}$$
$$r(-x) = -r(x) \quad \Rightarrow \quad \{(x<0) \quad \Rightarrow \quad r(x) \in [-1,0]\} \tag{18}$$
$$graf(r(x)) \in \mathbf{R} \ \ \text{x} \ \ [-1,1] \tag{19}$$
$$r'(x) = 0 \quad \Rightarrow \quad x \in \{-1,1\} \tag{20}$$
$$x \in \{-1,1\} r \textit{ tem tangente horizontal} \tag{21}$$

Na figura (4) página 5, gráfico feito á mão, com `xfig` *e figura (5) página 6, o gráfico feito com* `gnuplot`*.*

4. Calcule a derivada de $y = p(x) = -3cos^5(x) + 10cos^2(x) - 15cos(x)$

Solução 4

$$p(x) = f(g(x)) \tag{22}$$
$$f(x) = -3x^5 + 10x^2 - 15x; g(x) = cos(x) \tag{23}$$
$$p'(x) = f'(g(x))g'(x) = (-15g(x)^4 + 20g(x) - 15)g'(x) \tag{24}$$
$$p'(x) = -(-15cos^4(x) + 20cos(x) - 15)sen(x) \tag{25}$$
$$p'(x) = 15cos^4(x)sen(x) - 20cos(x)sen(x) + 15sen(x) \tag{26}$$
$$p'(x) = 15((1-sen^2(x))^2)sen(x) - 10sen(2x) + 15sen(x) \tag{27}$$
$$p'(x) = 15(1-2sen(x) + sen^2(x))sen(x) - 10sen(2x) + 15sen(x) \tag{28}$$
$$p'(x) = 15sen(x) - 30sen^2(x) + 15sen^3(x) - 10sen(2x) + 15sen(x) \tag{29}$$
$$p'(x) = 30sen(x) - 30sen^2(x) + 15sen^3(x) - 10sen(2x) \tag{30}$$

5. Dois carros de corrida, A, B, que tem a mesma potência, se emparelham num curva no ponto x_0 do autódromo. Depois disto o piloto do carro B observou que seu carro estava com um entupimento de valvulas perdendo potência e consequentemente velocidade. Finalmente o carro B perdeu a corrida. Faça um gráfico simulando a corrida dos dois carros a partir do ponto x_0.

Solução 5 *A figura (6) página 7, mostra as curvas de velocidade dos dois carros como idênticas até o ponto x_0 a partir de onde a velocidade do carro B começou a cair.*

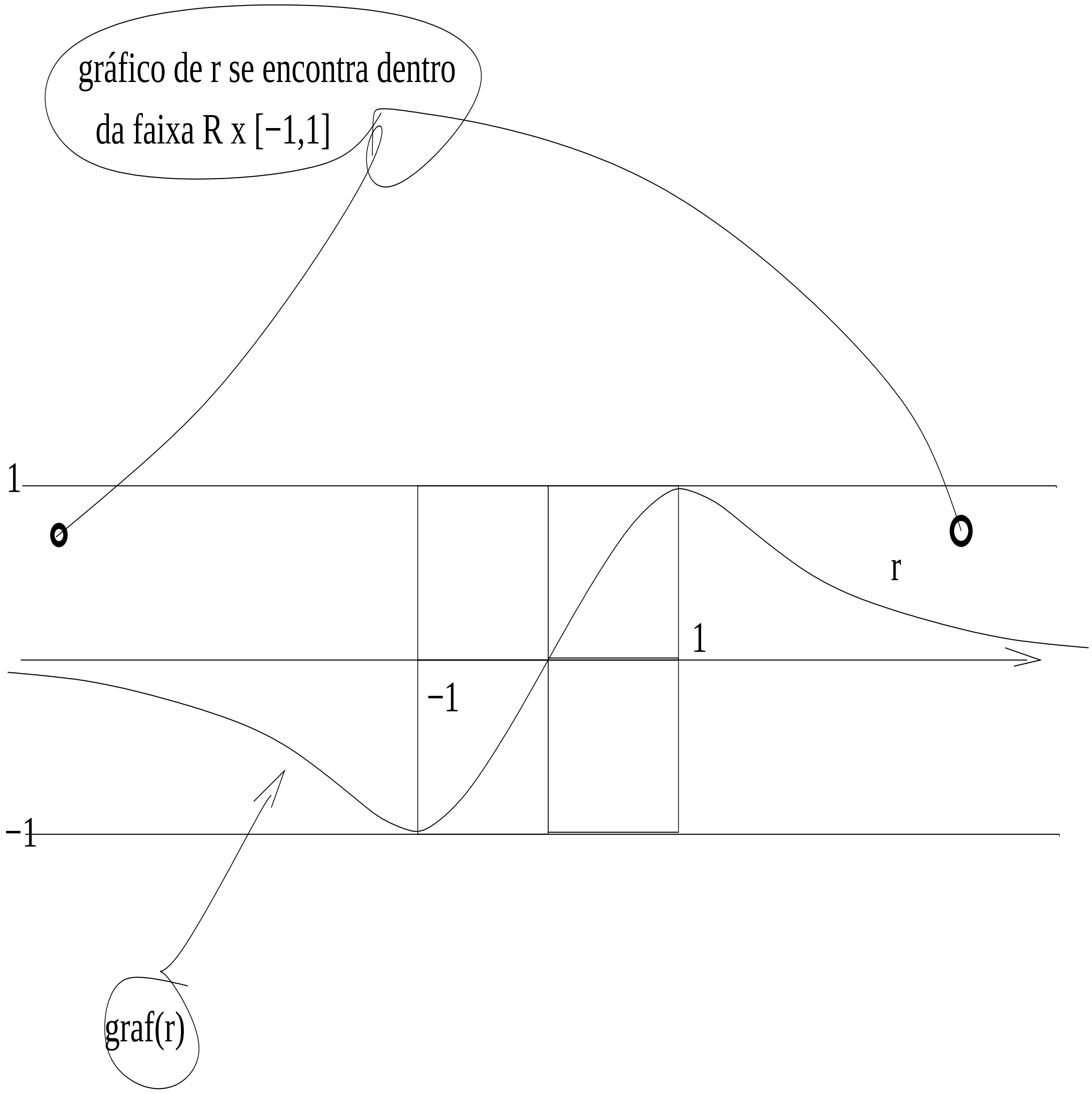

Figura 4: gráfico de $r(x)$ feito à mão com `xfig`

6. Calcule as derivadas das funções abaixo e diga onde são contínuas

a) $f(x) = cos(x+3)$	b) $f(x) = sin(3x+7)$	c)$f(x) = \frac{sin(x+3)}{cos(4-x)}$
d) $\frac{sin(x)}{1+x^2}$	e)$f(x) = \frac{2xsin(x)}{1+x^2}$	f) $\frac{x^2+3*x+2}{1+x^2}$

a) $f'(x) = -sen(x+3)$

b) $f'(x) = 3cos(3x+7)$

c)$f'(x) = \frac{cos(x+3)cos(4-x)+sen(x+3)sen(4-x)}{cos^2(4-x)}$

d) $f'(x) = \frac{cos(x)(1+x^2)-2xsin(x)}{(1+x^2)^2}$

e)$f'(x) = \frac{(2sin(x)+2xcos(x))(1+x^2)^2-4x^2sin(x)}{(1+x^2)^2}$

f) $f'(x) = \frac{(2x+3)(1+x^2)-2x(x^2+3*x+2)}{(1+x^2)^2}$

7. A função $f(x) = \sqrt{x}$ é a inversa da função $g(x) = x^2$ justifique esta afirmação com uma conta adequada. Calcule a derivada de $f(x) = \sqrt{x}$ e indique o domínio de validade.

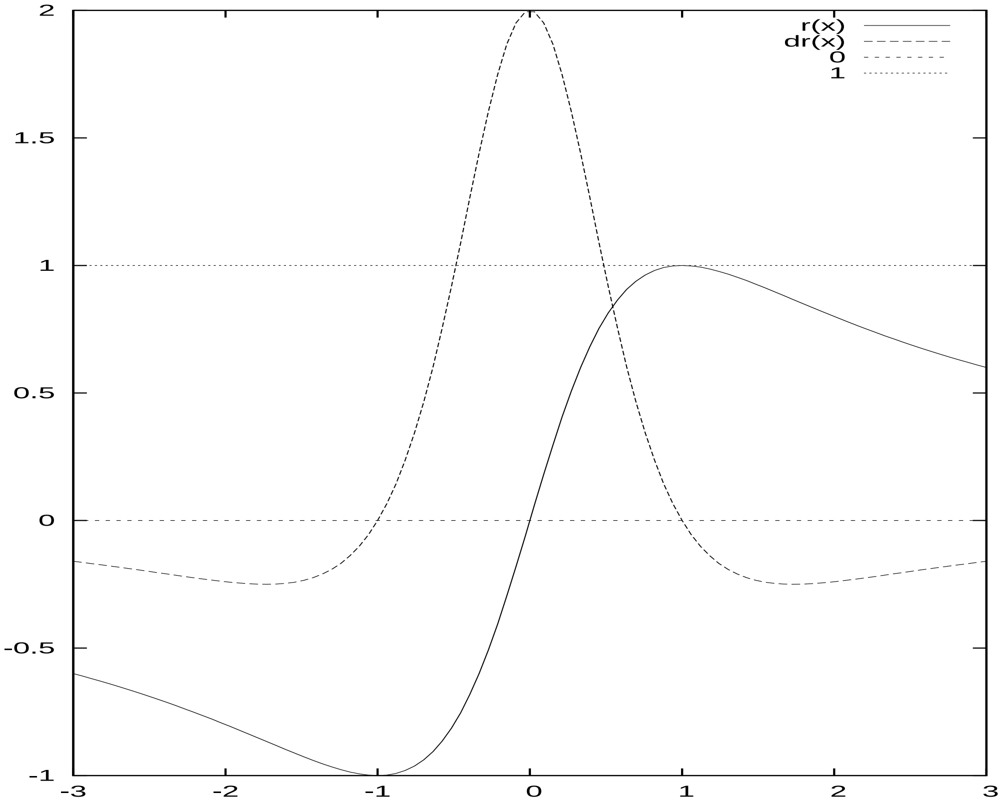

Figura 5: gráfico de $y = r(x), r'(x)$ com `gnuplot`

Solução 6 *Esta afirmação tem que ser limitada, por exemplo $\sqrt{x}$ tem dois valores para cada x, então temos fazer uma seleção. O usual é considerar $\sqrt{x}$ como o valor positivo.*

Depois não há raiz real de número negativos, então o $Dom_{(\sqrt{x})} = \{x; x \geq 0\} = R^+$.

Com estas restrições então $f(x) = \sqrt{x}, g(x) = x^2$ é um par de funções inversas:

$$x \geq 0 \implies g(f(x)) = f(g(x)) = x \tag{31}$$

$$f'(g(x))g'(x) = 1 \implies f'(g(x)) = \frac{1}{g'(x)} = \frac{1}{2x} \tag{32}$$

$$y = g(x) = x^2 \implies x = \sqrt{y} \implies 2x = 2\sqrt{y} \tag{33}$$

$$f'(g(x)) = f'(y) = \frac{1}{2\sqrt{y}}; n = \frac{1}{2} \implies f'(y) = ny^{n-1} \tag{34}$$

Portanto a regra de derivação para $f(x) = \sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}}$ é a mesma que para $f(x) = x^n$ quando n é um inteiro maior do 1.

8. A função $f(x) = \sqrt[3]{x}$ é a inversa da função $g(x) = x^3$ justifique esta afirmação com uma conta adequada. Calcule a derivada de $f(x) = \sqrt[3]{x}$ e indique o domínio de validade.

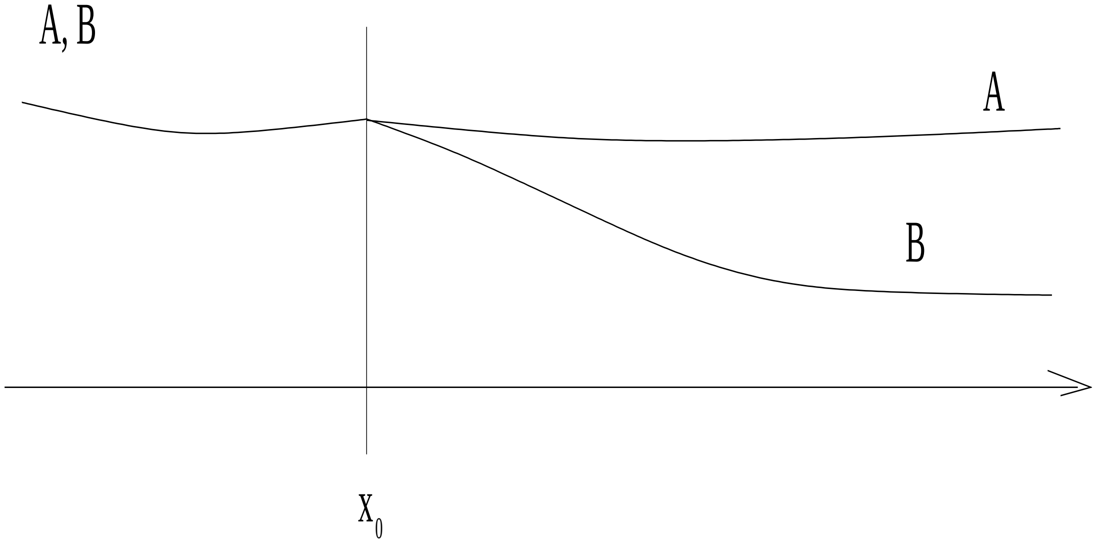

Figura 6: Gráfico da velocidade dos carros A, B

Solução 7

$$f'(x) = \frac{x^{-2/3}}{3} = nx^{n-1}; n = \frac{1}{3}$$

9. A função $f(x) = x^{\frac{p}{q}}$ pode ser vista como a composição de funções. Explicite isto e calcule a derivada de $y = f(x)$.

Solução 8

$$f(x) = x^{\frac{p}{q}} = \sqrt[q]{(x^p)} = h(g(x)) \tag{35}$$
$$f'(x) = h'(g(x))g'(x) = \tfrac{p}{q}(x^p)^{1/q-1}x^{p-1} \tag{36}$$
$$m - 1 = p/q - p + p - 1 = p/q - 1 \tag{37}$$
$$f'(x) = mx^{m-1} = \tfrac{p}{q}x^{(p/q)-1} \tag{38}$$

10. Calcule a derivada de $y = f(x) = \sqrt{\frac{x^3}{1-x}}$ indique qual é o domínio de validade de f e de f'. Faça o grafico de $y = f(x)$.

Solução 9

$$Dom_{f(x)} = [0, 1) \tag{39}$$
$$g(x) = \sqrt{x}; h(x) = \tfrac{x^3}{1-x}; \tag{40}$$
$$g'(x) = 0.5/g(x); h'(x) = \tfrac{(3x^2(1-x)+x^3)}{(1-x)^2} \tag{41}$$
$$f(x) = g(h(x)); f'(x) = g'(h(x))h'(x) \tag{42}$$

Em `gnuplot`

```
pow(x,n) = x**n;
g(x) = sqrt(x);
h(x) = pow(x,3)/(1-x);
f(x) = g(h(x));
dg(x) = 0.5/g(x);
dh(x) = (3*pow(x,2)*(1-x)+pow(x,3))/pow(1-x,2);
df(x) = dg(h(x))*dh(x);
set xrange [0.2:0.8];
plot f(x),df(x),0;
pause -2
delta = 0.0001;
d2f(x) = (f(x+delta) - f(x))/delta;
##set terminal post enhance portrait colour
##set output 'trabalhos/exer09_gabarito_09.eps'
plot f(x),d2f(x),df(x),0;
pause -2
```

que está no arquivo `exer09_gabarito_09.gnuplot`. A figura (7) página 8, mostra o resultado do script do `gnuplot`, a derivada aproximada, $Q_{\Delta} f(x)$

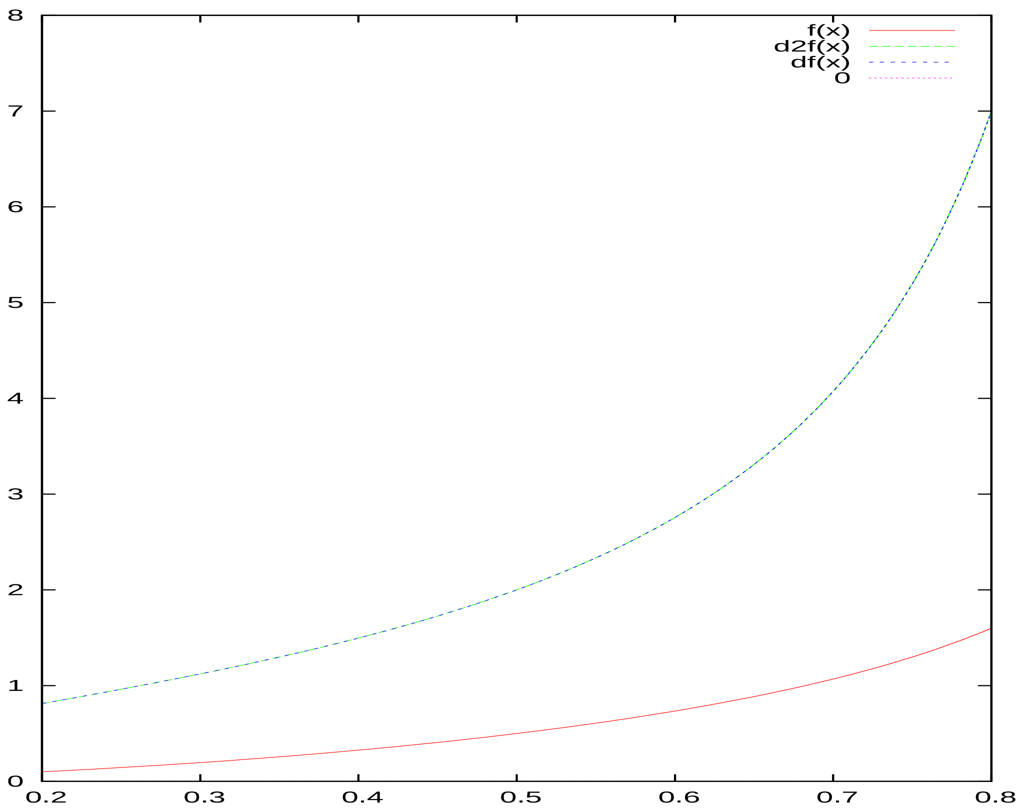

Figura 7: gráfico de $f(x), f'(x), Q_{\Delta} f(x)$, com $\Delta = 0.0001$

serve para verificar, graficamente, se os cálculos foram feitos corretamente.