Cálculo I | **Lista número 08**
Regras de derivação | tarcisio@member.ams.org
T. Praciano-Pereira | **Dep. de Computação**

alun@:

Univ. Estadual Vale do Acaraú | 16 de setembro de 2009
Documento produzido com LaTeX | sis. op. Debian/Gnu/Linux

1 Informações

Por favor , siga as instruções sobre nomes de arquivos, leia as intruções na página da disciplina.

Se o trabalho for feito em equipe, basta um único trabalho ser entregue e neste caso, no cabeçalho, devem estar os nomes completos de tod@s @s alun@s junto com os seus respectivos e-mails. O número de membros de uma equipe não deve ultrapassar três.

Data da entrega da lista: dia 22 de Setembro, terça-feira.

1.1 Objetivo

Obter duas regras de derivação, a das funções compostas, chamada regra da cadéia, e a derivada do quociente.

Palavras chave derivada do quociente, regra da cadéia

1.2 Avaliação do trabalho

Leia na página da disciplina a este respeito.

2 Exercícios

1. (a) (V)[ ](F)[ ] Uma função $y = f(x)$ é contínua sse $\lim_{\rho=0} \Delta_\rho(f) = 0$

   (b) (V)[ ](F)[ ] Uma função $y = f(x)$ é derivável sse pudermos provar que $\lim_{\rho=0} Q_\rho(f)(x)$ existe e neste caso este limite se chama $f'(x) = \lim_{\rho=0} Q_\rho(f)(x)$

   (c) (V)[ ](F)[ ] $f(x) = x^3$ é contínua porque

$$\Delta_\rho(f) = 3x^2\rho + 3x\rho^2 + \rho^3 \tag{1}$$
$$\lim_{\rho=0} \Delta_\rho(f) = 0 \tag{2}$$

   (d) (V)[ ](F)[ ] $f(x) = sin(x)$ é contínua porque

$$\Delta_\rho(f)(x) = sin(x+\rho) - sin(x) = sin(x)cos(\rho) + cos(x)sin(\rho) - sin(x)$$
$$\Delta_\rho(f)(x) = sin(x)(cos(\rho) - 1) + cos(x)sin(\rho)$$
$$\lim_{\rho=0} \frac{cos(\rho)-1}{\rho} = 0 \implies |cos(\rho) - 1| \le |\rho|$$
$$|sin(x)(cos(\rho)-1)| = |sin(x)||(cos(\rho)-1)| \le< |\rho|$$
$$\lim_{\rho=0} sin(x)(cos(\rho)-1) < \lim_{\rho=0} |\rho| = 0$$
$$|cos(x)sin(\rho)| = |cos(x)||sin(\rho)| \le |sin(\rho)| \le |\rho|$$
$$\lim_{\rho=0} cos(x)sin(\rho) \le \lim_{\rho=0} |\rho| = 0 \qquad \lim_{\rho=0}$$

   (e) (V)[ ](F)[ ] $f(x) = cos(x)$ é contínua porque

$$\Delta_\rho(cos)(x) = cos(x+\rho) - cos(x) = cos(x)cos(\rho) - sin(x)sin(\rho) - cos(x) \tag{10}$$
$$\Delta_\rho(cos)(x) = cos(x)(cos(\rho) - 1) - sin(x)sin(\rho) \tag{11}$$
$$\lim_{\rho=0} cos(\rho) - 1 = 0 \tag{12}$$
$$\lim_{\rho=0} sin(x)sin(\rho) = 0 \tag{13}$$
$$\lim_{\rho=0} \Delta_\rho(cos)(x) = 0 \tag{14}$$

2. Derivada da função composta Para calcularmos uma derivada temos que "fazer aparecer a expressão do quociente" $Q_\rho(f)(x)$ e provar que este limite existe. O objetivo aqui é ver como é este quociente no caso de $f(g(x))$ - a composta de duas funções deriváveis.

   (a) (V)[ ](F)[ ] Um exemplo. $h(x) = sen^2(x) \Rightarrow h'(x) = 2sen(x)co(x)$

   (b) (V)[ ](F)[ ]

$$h(x) = sen^2(x) = f(g(x)) \tag{15}$$
$$f(x) = x^2; g(x) = sen(x) \tag{16}$$
$$h'(x) = f'(g(x))g'(x) \tag{17}$$

   (c) (V)[ ](F)[ ] Outro exemplo. $h(x) = 3sen^2(x) + 5sen(x) \Rightarrow h'(x) = 6sen(x)cos(x) + 5cos(x)$

   (d) (V)[ ](F)[ ]

$$h(x) = 3sen^2(x) + 5sen(x) = f(g(x)) \tag{18}$$
$$f(x) = 3x^2 + 5x; g(x) = sen(x) \tag{19}$$
$$h'(x) = f'(g(x))g'(x) \tag{20}$$

(e) <u>(V)[ ](F)[ ]</u> Regra da cadéia.

$$h(x) = f(g(x)) \;\Rightarrow\; Q_\rho(h)(x) = \tfrac{f(g(x+\rho)-f(g(x))}{\rho} \tag{21}$$
$$g(x+\rho) = y_1; g(x) = y; y_1 = y+\theta; \theta = y - y_1 \tag{22}$$
$$f(g(x+\rho)) - f(g(x)) = f(y_1) - f(y) = f(y+\theta) - f(y) \tag{23}$$
$$Q_\rho(h)(x) = \tfrac{f(y_1)-f(y)}{\rho} = \tfrac{f(y_1)-f(y)}{\rho}\tfrac{y_1-y}{y_1-y} \tag{24}$$
$$Q_\rho(h)(x) = \tfrac{f(g(x+\rho))-f(g(x))}{g(x+\rho))-g(x)}\tfrac{g(x+\rho))-g(x)}{\rho} \tag{25}$$
$$Q_\rho(h)(x) = \tfrac{f(y+\theta)-f(y))}{\theta}\tfrac{g(x+\rho))-g(x)}{\rho} \tag{26}$$
$$Q_\rho(h)(x) = Q_\theta(f)(y)Q_\rho(g)(x) \tag{27}$$
$$\theta = g(x+\rho) - g(x) = \Delta_\rho(g)(x) \implies \lim_{\rho=0}\theta = 0 \tag{28}$$
$$\lim_{\rho=0} Q_\rho(h)(x) = \lim_{\theta=0} Q_\theta(f)(y) \lim_{\rho=0} Q_\rho(g)(x) \tag{29}$$
$$\lim_{\rho=0} Q_\rho(h)(x) = f'(y)g'(x) \tag{30}$$
$$\lim_{\rho=0} Q_\rho(h)(x) = f'(g(x))g'(x) \tag{31}$$
$$(f(g(x))' = f'(g(x))g'(x) \tag{32}$$

3. (a) <u>(V)[ ](F)[ ]</u> $h(x) = sin^2(x) \;\Rightarrow\; h'(x) = 2sin(x)cos(x)$
   (b) <u>(V)[ ](F)[ ]</u> $h(x) = sin(x^2) \;\Rightarrow\; h'(x) = 2sin(x)cos(x)$
   (c) <u>(V)[ ](F)[ ]</u> $h(x) = sin(x^2) \;\Rightarrow\; h'(x) = 2xcos(x^2)$
   (d) <u>(V)[ ](F)[ ]</u> $h(x) = sin(cos(x)) \;\Rightarrow\; h'(x) = sin(x)cos(x)$
   (e) <u>(V)[ ](F)[ ]</u> $h(x) = sin(cos(x)) \;\Rightarrow\; h'(x) = -cos(cos(x))sin(x)$
   (f) <u>(V)[ ](F)[ ]</u> $h(x) = sin(x^3) \;\Rightarrow\; h'(x) = 3xcos(x^3)$
   (g) <u>(V)[ ](F)[ ]</u> $h(x) = sin(x^3) \;\Rightarrow\; h'(x) = 3x^2cos(x^3)$

4. (a) <u>(V)[ ](F)[ ]</u> $h(x) = \frac{1}{x} \implies \Delta_\rho(h)(x) = \frac{1}{x+\rho} - \frac{1}{x}$
   (b) <u>(V)[ ](F)[ ]</u> $h(x) = \frac{1}{x} \implies \Delta_\rho(h)(x) = \frac{-\rho}{(x+\rho)x}$
   (c) <u>(V)[ ](F)[ ]</u> $h(x) = \frac{1}{x} \implies \mathbf{Q}_\rho(h)(x) = -\frac{1}{(x+\rho)x}$
   (d) <u>(V)[ ](F)[ ]</u> $h(x) = \frac{1}{x} \implies h'(x) = -\frac{1}{x^2}$ e vale para todo $x \neq 0$.

(e) <u>(V)[ ](F)[ ]</u> Exemplo.

$$h(x) = \tfrac{1}{x} \tag{33}$$
$$tan(x) = sin(x)h(cos(x)) \tag{34}$$
$$(tan(x))' = cos(x)h(cos(x)) - sin(x)h'(cos(x))sin(x) \tag{35}$$
$$(tan(x))' = cos(x)h(cos(x)) - sin^2(x)h'(cos(x)) \tag{36}$$
$$(tan(x))' = cos(x)\tfrac{1}{cos(x)} - sin^2(x)\tfrac{-1}{cos^2(x)} \tag{37}$$
$$(tan(x))' = 1 + sin^2(x)\tfrac{1}{cos^2(x)} \tag{38}$$
$$(tan(x))' = 1 + \tfrac{sin^2(x)}{cos^2(x)} \tag{39}$$
$$(tan(x))' = \tfrac{cos^2(x)+sin^2(x)}{cos^2(x)} \tag{40}$$
$$(tan(x))' = \tfrac{1}{cos^2(x)} \tag{41}$$

(f) <u>(V)[ ](F)[ ]</u> Derivada do quociente. Quando $g(x) \neq 0$

$$h(x) = \tfrac{f(x)}{g(x)} \tag{42}$$
$$h(x) = f(x)h(g(x)) \tag{43}$$
$$h'(x) = f'(x)h(g(x)) + f(x)h'(g(x))g'(x) \tag{44}$$
$$h'(x) = f'(x)h(g(x)) + f(x)\tfrac{-g'(x)}{g(x)^2} \tag{45}$$
$$h'(x) = f'(x)\tfrac{1}{g(x)} + \tfrac{-f(x)g'(x)}{g(x)^2} \tag{46}$$
$$h'(x) = \tfrac{f'(x)}{g(x)} + \tfrac{-f(x)g'(x)}{g(x)^2} \tag{47}$$
$$h'(x) = \tfrac{f'(x)g(x)-f(x)g'(x)}{g(x)^2} \tag{48}$$

(g) <u>(V)[ ](F)[ ]</u>

$$h(x) = tan(x) = \tfrac{sin(x)}{cos(x)} \tag{49}$$
$$h'(x) = (tan(x))' = \tfrac{(sin(x))'cos(x)-sin(x)(cos(x))'}{cos(x)^2} \tag{50}$$
$$(tan(x))' = \tfrac{cos(x)cos(x)+sin(x)sin(x)}{cos(x)^2} \tag{51}$$
$$(tan(x))' = \tfrac{1}{cos(x)^2} \tag{52}$$

(h) <u>(V)[ ](F)[ ]</u>

$$h(x) = \tfrac{x^2+3x+1}{x^4+3x^2+1} \tag{53}$$
$$h'(x) = \tfrac{(2x+3)(x^4+3x^2+1)-(x^2+3x+1)(4x^3+6x)}{(x^4+3x^2+1)^2} \tag{54}$$
$$h'(x) = \tfrac{-2x^5-9x^4-4x^3-9x^2-4x+3}{(x^4+3x^2+1)^2} \tag{55}$$