Calculo I	**Lista número 06**
Limite, continuidade	tarcisio@member.ams.org
T. Praciano-Pereira	**Dep. de Computação**

alun@:

Univ. Estadual Vale do Acaraú	8 de setembro de 2009
página da disciplina	www.calculo.sobralmatematica.org
Documento produzido com LaTeX	sis. op. Debian/Gnu/Linux

1 Informações

Data da entrega da lista: dia 15 de Setembro, terça-feira. A partir desta lista *os trabalhos atrazados não serão mais corrigidos* (concorrem exclusivamente à nota mínima, 05). Se o trabalho for feito em equipe, basta um único trabalho ser entregue e neste caso, no cabeçalho, devem estar os nomes completos de tod@s @s alun@s junto com os seus respectivos e-mails. O número de membros de uma equipe não deve ultrapassar três.

Este trabalho tem questões que não são de múltipla escolha, a avaliação destas questões será com, um ponto se for feita, ou zero se não for feita, independentemente que esteja correta ou não (é a mesma avaliação das justificativas).

2 Resumo teórico

As funções trigonométricas oferecem uma dificuldade especial que é preciso não desprezar: elas tem uma *definição geométrica* e nós precisamos *fazer contas* com suas *propriedades algébricas*. As pontes para saltar sobre este fosso são muito exíguas e dependem de uma arte multi secular, *as fórmulas trigonométricas*.

Um pouco de números complexos ajudam a criar um método para redescobrir, quando necessário, as fórmulas dos arcos-soma, vou fazer isto na primeira seção. Eles servem para bem mais do que apenas isto uma vez que eles estão intimamente ligados com a trigonometria.

3 Números complexos e trigonometria

Os números complexos surgem naturalmente quando resolvemos equações algébricas do segundo grau

$$ax^2 + bx + c = 0 \tag{1}$$

$$x_1 = \frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a} \tag{2}$$

$$x_2 = \frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a} \tag{3}$$

se o discriminante na fórmula (2) e (3) for negativo então o número $\underline{i = \sqrt{-1}}$ vem resolver o problema:

$$ax^2 + bx + c = 0 \tag{4}$$

$$\Delta < 0 \implies -b^2 + 4ac > 0; x_1 = \frac{-b+i\sqrt{-b^2+4ac}}{2a} \tag{5}$$

$$\Delta < 0 \implies -b^2 + 4ac > 0; x_2 = \frac{-b-i\sqrt{-b^2+4ac}}{2a} \tag{6}$$

Os números complexos expandem os números reais e são os números da forma

$$a + bi = (a, b) \tag{7}$$

Exemplo 1 (Número complexo) *Solução de uma equação*
Considere a equação $x^2 + 3x + 5 = 0$ então

$$\Delta = b^2 - 4ac = 9 - 20 = -11 \tag{8}$$

$$\sqrt{\Delta} = \sqrt{-11} = \sqrt{(-1) * 11} = \sqrt{-1}\sqrt{11} = i\sqrt{11} \tag{9}$$

$$x_1 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-3+i\sqrt{11}}{2} = \frac{-3}{2} + i\frac{\sqrt{11}}{2} = a_1 + ib_1 \tag{10}$$

$$x_2 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-3-i\sqrt{11}}{2} = \frac{-3}{2} - i\frac{\sqrt{11}}{2} = a_2 + ib_2 \tag{11}$$

Um número complexo é um par de números reais: $a + bi = (a, b)$.

Um par de números reais representa um ponto no plano cartesiano, assim uma forma de representar geométricamente os números complexos, consiste em considerá-los como pontos do plano.

Vou um pouco além nesta representação acrescentando o segmento de reta que liga o ponto à origem, nesta ordem.

Estou considerando um segmento de reta orientado como representação de um número complexo.

Desta maneira esta representação *absorve* de forma *ótima* a representação geométrica dos números reais onde os pontos também são segmentos de reta orientados.

Na figura (1) página 3, você pode ver a representação geométrica de dois números complexos e também a soma deles, usando a regra do paralelograma,

$$u = a + bi \text{ e } v = c + di \tag{12}$$

$$u + v = a + c + (b + d)i \tag{13}$$

3.1 A representação geométrica de um número complexo.

Alguns exercícios vão conduzí-l@s a melhor entender os números complexos e as operações que podemos fazer com eles.

3.2 Objetivo

Funções funções trigonométricas e os números complexos.

Nesta lista de exercícios vamos recuperar várias desigualdades trigonométricas com o objetivo de provar que

$$(sen(x))' = cos(x) \text{ e } (cos(x))' = -sen(x) \tag{14}$$

Palavras chave seno, coseno, relações trigonométricas.

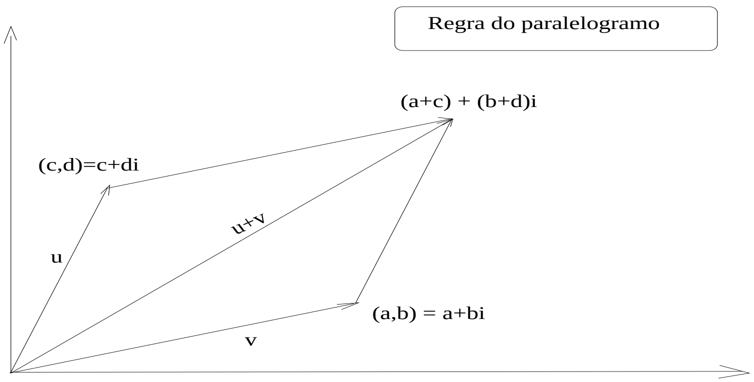

Figura 1: a regra do paralelograma

3.3 Avaliação do trabalho

Leia na página da disciplina a este respeito.

4 Exercícios

Em todas as questões desta lista a variável ρ representa o zero, ou, ainda, sempre vou calcular o limite $\lim_{\rho=0}$

1. Represente geométricamente

$$u = (2+3i), v = (3+2i), u+v = (2+3i)+(3+2i) = 5+5i$$

a representação geométrica, que você deve fazer, se compõe dos segmentos de reta orientados que vão da origem até os pontos $(2,3), (3,2), (5,5)$. Observe que $(5,5) = 5+5i$ é a diagonal do paralelogramo determinado pelos outros dois, é este o conteúdo da *regra do paralelograma* na soma se números complexos. É a mesma soma de vetores que você estudou em Física.

2. O cálculo algébrico $(a+bi)+(c+di)$ é dado por
   (a) (V)[ ](F)[ ] $ac+bdi$
   (b) (V)[ ](F)[ ] $ac-bdi$
   (c) (V)[ ](F)[ ] $(a+c)+i(b+d)$

3. Identifique as afirmações corretas
   (a) (V)[ ](F)[ ] $(2+3i)(3+2i) = 4i+9i$

   (b) (V)[ ](F)[ ] $(2+3i)(3+2i) = 13i$
   (c) (V)[ ](F)[ ] $i^2 = 1$
   (d) (V)[ ](F)[ ] $i^2 = -1$

4. Identifique as afirmações corretas
   (a) (V)[ ](F)[ ] $|(2+3i)| = 13$
   (b) (V)[ ](F)[ ] $|(2+3i)| = \sqrt{13}$
   (c) (V)[ ](F)[ ] $(2+3i)\frac{2-3i}{13} = 1$
   (d) (V)[ ](F)[ ] $|(cos(\gamma)+isen(\gamma)| = 2$
   (e) (V)[ ](F)[ ] $|(cos(\gamma)+isen(\gamma)| = 1$
   (f) (V)[ ](F)[ ] $(2+3i)(2-3i) = \sqrt{13}$
   (g) (V)[ ](F)[ ] $(2+3i)(2-3i) = 13$

5. Notação de Euler:

$$cos(\gamma)+isen(\gamma) = e^{i\gamma} \tag{15}$$

Selecione valores para α, γ e represente geometricamente

$$e^{i\gamma} = (cos(\gamma)+isen(\gamma) \tag{16}$$
$$e^{i\alpha} = (cos(\alpha)+isen(\alpha)) \tag{17}$$
$$e^{-i\gamma} = (cos(-\gamma)+isen(-\gamma) \tag{18}$$

O produto dos números complexos $e^{i\gamma},\ e^{i\alpha}$ é
   (a) (V)[ ](F)[ ] $e^{i(\gamma+\alpha)} = cos(\gamma)sen(\gamma)+icos(\alpha)sen(\alpha)$
   (b) (V)[ ](F)[ ] $e^{i(\gamma+\alpha)} = cos(\gamma)cos(\alpha)-sen(\gamma)sen(\alpha)$
   (c) (V)[ ](F)[ ]

$$e^{i(\gamma+\alpha)} =$$
$$= cos(\gamma)cos(\alpha)-sen(\gamma)sen(\alpha)+i\left[cos(\gamma)sen(\alpha)+sen(\gamma)cos(\alpha)\right]$$

6. Na figura (2) página 5, há dois pontos marcados no círculo trigonométrico, $e^{i\alpha}, e^{-i\gamma}$ eles determinam o ângulo $\alpha-\gamma$. A distância entre estes dois pontos é
   (a) (V)[ ](F)[ ] $2+2cos(\alpha-\gamma)$
   (b) (V)[ ](F)[ ] $1-cos(\alpha-\gamma)$
   (c) (V)[ ](F)[ ] $2-2cos(\alpha-\gamma)$
   (d) (V)[ ](F)[ ] $h = \sqrt{2-2cos(\alpha-\gamma)}$

7. Na figura (2) página 5, há dois pontos marcados no círculo trigonométrico, $e^{i\alpha}, e^{-i\gamma}$ eles determinam a hipotenusa de um triângulo retângulo indicado na figura. Os catetos deste triângulo retângulo, r, s, medem

   (a) <u>(V)[ ](F)[ ]</u> $1 - cos(\alpha - \gamma), cos(\alpha - \gamma)$

   (b) <u>(V)[ ](F)[ ]</u> Sendo $h = \sqrt{2 - 2cos(\alpha - \gamma)}$, um dos catetos sendo $r = 1 - cos(\alpha - \gamma)$ então o outro cateto é $s = \sqrt{l^2 - h^2}$

   (c) <u>(V)[ ](F)[ ]</u> Sendo $h = \sqrt{2 - 2cos(\alpha - \gamma)}$, um dos catetos sendo $r = 1 - cos(\alpha - \gamma)$ então o outro cateto é $s = \sqrt{h^2 - l^2}$

   (d) <u>(V)[ ](F)[ ]</u> Os catetos são $r = 1 - cos(\alpha - \gamma)$ e $s = sen(\alpha - \gamma)$

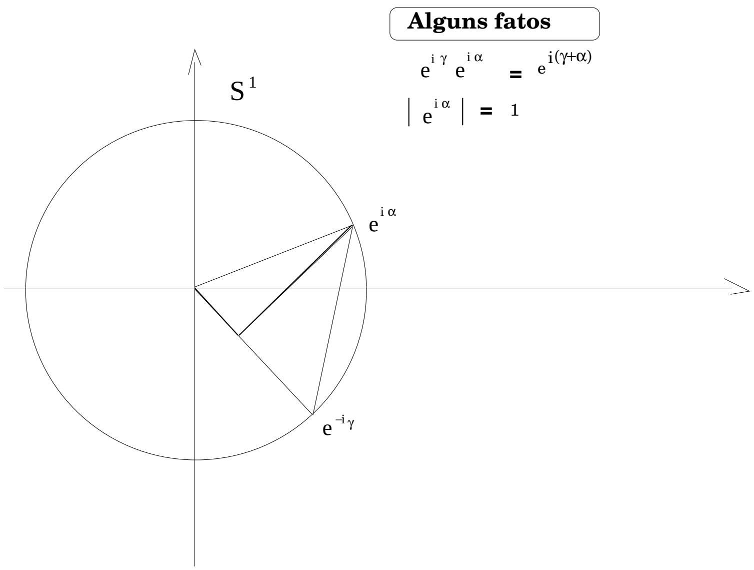

Figura 2: Distância entre dois pontos no círculo trigonométrico

   (e) <u>Gráfico do seno e do coseno</u>

      i. <u>(V)[ ](F)[ ]</u> O coseno pode ser interpretado como a *abcissa*, a coordenada "x", de um ponto $\underline{P}$ sobre o círculo unitário. Consequentemente $cos(\alpha)$ pode ser maior do que 1.

      ii. <u>(V)[ ](F)[ ]</u> O coseno pode ser interpretado como a *abcissa*, a coordenada "x", de um ponto $\underline{P}$ sobre o círculo unitário. Consequentemente $-1 < cos(\alpha) < 1$.

      iii. <u>(V)[ ](F)[ ]</u> Na expressão $cos(\alpha)$ o parâmetro α é a médida de arco do círculo unitário tendo o ponto $(0, 1)$ como início e o ponto $\underline{P}$ como final.

      iv. <u>(V)[ ](F)[ ]</u> O seno pode ser interpretado como a *ordenada*, a coordenada "y", de um ponto $\underline{P}$ sobre o círculo unitário. Consequentemente $cos(\alpha)$ pode ser maior do que 1.

      v. <u>(V)[ ](F)[ ]</u> O seno pode ser interpretado como a *ordenada*, a coordenada "y", de um ponto $\underline{P}$ sobre o círculo unitário. Consequentemente $-1 < sen(\alpha) < 1$.

      vi. <u>(V)[ ](F)[ ]</u> O perímetro do círculo unitário é 2π e as frações deste número representam a medida natural dos ângulos. Por definição os valores do *seno* e do *coseno* são periódicos, se repetindo a cada 2π.

      vii. <u>(V)[ ](F)[ ]</u> O grafico do seno se encontra na figura (3) página 6.

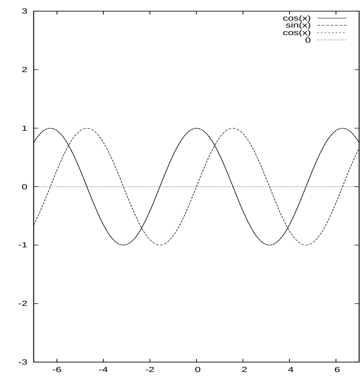

Figura 3: gráfico do seno

      viii. <u>(V)[ ](F)[ ]</u> O grafico do coseno se encontra na figura (3) página 6.