Cálculo I | **Lista número 05**
Operações e operador quociente | tarcisio@member.ams.org
T. Praciano-Pereira | **Dep. de Computação**

alun@:

Univ. Estadual Vale do Acaraú | 1 de setembro de 2009

Documento produzido com LaTeX | sis. op. Debian/Gnu/Linux

1 Informações

Por favor, prenda esta *folha de rosto* na solução, preenchendo com os seus dados, ela será usada na correção. Se você quiser entregar o trabalho eletrônicamente, envie o arquivo para o meu e-mail ou entregue em CD na secretária do Curso de Computação. Se o trabalho for feito em equipe, basta um único trabalho ser entregue com os membros da equipe identificados no cabeçalho.

Por favor, siga as instruções sobre nomes de arquivos, leia as intruções na página da disciplina.

Data da entrega da lista: dia 08 de Setembro, terça-feira.

1.1 Objetivo

Limite de sucessões, e o operador Q_ρ e as operações com funções.

Esta lista foi feita com apoio do programa `exer05_01.gnuplot` que se encontram no link "programas" da página da disciplina. Experimentar com programas não é suficiente para dominar o assunto.

As experiências apenas produzem intuição, as **contas** produzem **conhecimento**.

Palavras chave: Derivada, operador quociente de diferenças, operações com funções, gráficos de funções.

1.2 Avaliação do trabalho

Leia na página da disciplina a este respeito. Acrescente as perguntas sobre sua avaliação do meu trabalho na disciplina. A sua opinião é importante para a melhoria do meu trabalho, não tema ser crític@, apenas tema ser mal educad@.

2 Exercícios

1. Limite de sucessões

   (a) (V)[ ](F)[ ] O limite da sucessão $\frac{n+1}{n}$ é 1 porque

   $$\frac{n+1}{n} = 1 + \frac{1}{n} \quad (1)$$
   $$\frac{1}{n} \equiv 0 \;\Rightarrow\; 1 + \frac{1}{n} \equiv 1 \quad (2)$$

   (b) (V)[ ](F)[ ] O limite da sucessão $\frac{n}{n+1}$ é 1 porque

   $$(\frac{n}{n+1})^{-1} = \frac{n+1}{n} \quad (3)$$
   $$\frac{n+1}{n} \equiv 1 \;\Rightarrow\; (\frac{n}{n+1})^{-1} \equiv 1^{-1} = 1 \quad (4)$$

   (c) (V)[ ](F)[ ]
   O limite da sucessão $\frac{3n+1}{n}$ é 1 porque

   $$\frac{3n+1}{n} = 3 + \frac{1}{n} \quad (5)$$
   $$\frac{1}{n} \equiv 0 \;\Rightarrow\; 3 + \frac{1}{n} \equiv 1 \quad (6)$$

   (d) (V)[ ](F)[ ]
   O limite da sucessão $\frac{3n+1}{n}$ é 3 porque

   $$\frac{3n+1}{n} = 3 + \frac{1}{n} \quad (7)$$
   $$\frac{1}{n} \equiv 0 \;\Rightarrow\; 3 + \frac{1}{n} \equiv 3 \quad (8)$$

   (e) (V)[ ](F)[ ] O limite da sucessão $\frac{n^2+n+1}{n^2}$ é 2 porque

   $$\frac{n^2+n+1}{n^2} = 1 + \frac{n}{n^2} + \frac{1}{n^2} \quad (9)$$
   $$\frac{n}{n^2} \equiv \frac{1}{n}\frac{n}{n^2}0 \quad (10)$$
   $$\frac{1}{n^2} \equiv (\frac{1}{n})^2 \equiv 0^2 \equiv 0 \quad (11)$$
   $$\frac{n^2+n+1}{n^2} \equiv 1 + 1 + 0 \equiv 2 \quad (12)$$

   (f) (V)[ ](F)[ ] O limite da sucessão $\frac{n^2+n+1}{n^2}$ é 1 porque

   $$\frac{n^2+n+1}{n^2} = 1 + \frac{n}{n^2} + \frac{1}{n^2} \quad (13)$$
   $$\frac{n}{n^2} \equiv \frac{1}{n}\frac{n}{n^2}0 \quad (14)$$
   $$\frac{1}{n^2} \equiv (\frac{1}{n})^2 \equiv 0^2 \equiv 0 \quad (15)$$
   $$\frac{n^2+n+1}{n^2} \equiv 1 + 0 + 0 \equiv 1 \quad (16)$$

   (g) (V)[ ](F)[ ] O limite da sucessão $\frac{n^2}{n^2+3n+2}$ é 1 porque

   $$(\frac{n^2}{n^2+3n+2})^{-1} = \frac{n^2+3n+2}{n^2} \quad (17)$$
   $$\lim_{n=\infty} \frac{n^2+3n+2}{n^2} = 1 \Longrightarrow \lim_{n=\infty} \frac{n^2}{n^2+3n+2} = 1 \quad (18)$$

2. limite Selecione a verdadeira

   (a) (V)[ ](F)[ ]
   $$\lim_{n=\infty} \frac{3n^2+3n+2}{n^2} = 1$$

(b) <u>(V)[ ](F)[ ]</u>

$$\lim_{n=\infty} \frac{3n^2+3n+2}{n^2} = 3$$

(c) <u>(V)[ ](F)[ ]</u>

$$\lim_{n=\infty} \frac{n^3+3n+2}{n^3+3n} = 3$$

(d) <u>(V)[ ](F)[ ]</u>

$$\lim_{n=\infty} \frac{n^3+3n+2}{n^3+3n} = 1$$

(e) <u>(V)[ ](F)[ ]</u>

$$\lim_{n=\infty} \frac{n^3+10n+2}{n^3+3n} = 10$$

(f) <u>(V)[ ](F)[ ]</u>

$$\lim_{n=\infty} \frac{n^3+10n+2}{n^3+3n} = 1$$

(g) <u>(V)[ ](F)[ ]</u>

$$\lim_{n=\infty} \frac{n^5+10n+2}{n^5+3n^2} = 2$$

(h) <u>(V)[ ](F)[ ]</u>

$$\lim_{n=\infty} \frac{n^5+10n+2}{n^5+3n^2} = 1$$

(i) <u>(V)[ ](F)[ ]</u>

$$\lim_{n=\infty} \frac{3n^5+10n+2}{n^5+3n^2} = 3$$

(j) <u>(V)[ ](F)[ ]</u>

$$\lim_{n=\infty} \frac{n^5+10n+2}{3n^5+3n^2} = \frac{1}{3}$$

3. <u>limites infinito e zero - comparações</u>

(a) <u>(V)[ ](F)[ ]</u> $\lim_{n=\infty} \frac{n}{n^2+1} = 0 \implies \lim_{n=\infty} \frac{n^2+1}{n} = \infty$

(b) <u>(V)[ ](F)[ ]</u> $\lim_{n=\infty} \frac{3n+4}{n^2+1} = 0 \implies \lim_{n=\infty} \frac{n^2+1}{3n+4} = \infty$

(c) <u>(V)[ ](F)[ ]</u>
$\lim_{n=\infty} \frac{n+1}{n^2+3n+1} = 0$ porque

$$\frac{n+1}{n^2+3n+1} = \left(\frac{n^2+3n+1}{n+1}\right)^{-1} \tag{19}$$

$$\lim_{n=\infty} \frac{n^2+3n+1}{n+1} = \infty \implies \lim_{n=\infty} \frac{n+1}{n^2+3n+1} = 0 \tag{20}$$

(d) <u>(V)[ ](F)[ ]</u> $\lim_{n=\infty} \frac{n^4+3n+1}{n^3+1} = \infty$

(e) <u>(V)[ ](F)[ ]</u>
$\lim_{n=\infty} \frac{n^5+3n+1}{n^4+3n^2+n+1} = \infty$

(f) <u>(V)[ ](F)[ ]</u> $\lim_{n=\infty} \frac{n^4+3n^2+n+1}{n^5+3n+1} = 0$

(g) <u>(V)[ ](F)[ ]</u> $\lim_{n=\infty} \frac{n^2+3n+1}{n^3+3n+1} = 0$

(h) <u>(V)[ ](F)[ ]</u> $\lim_{n=\infty} \frac{n^4+3n+1}{3n^4+3n+1} = \frac{1}{3}$

4. Selecione a verdadeira quando as contas estiverem corretas.

(a) <u>(V)[ ](F)[ ]</u>

$$\Delta_\rho(fg) = f(x+\rho)g(x+\rho) - f(x)g(x) = \tag{21}$$
$$f(x+\rho)g(x+\rho) - f(x+\rho)g(x) + f(x+\rho)g(x) - f(x)g(x) = \tag{22}$$
$$f(x+\rho)\Delta_\rho(g) + \Delta_\rho(f)g(x) \tag{23}$$

(b) <u>(V)[ ](F)[ ]</u>

$$Q_\rho(fg) = \frac{\Delta_\rho(fg)}{\rho} = \frac{f(x+\rho)g(x+\rho)-f(x)g(x)}{\rho} = \tag{24}$$
$$\frac{f(x+\rho)g(x+\rho)-f(x+\rho)g(x)+f(x+\rho)g(x)-f(x)g(x)}{\rho} = \tag{25}$$
$$f(x+\rho)\frac{g(x+\rho)-g(x)}{\rho} + \frac{f(x+\rho)-f(x)}{\rho}g(x) = \tag{26}$$
$$f(x+\rho)Q_\rho(g) + Q_\rho(f)g(x) \tag{27}$$

(c) <u>(V)[ ](F)[ ]</u>**Definição de função derivável**
Uma função é **derivável** sse $\lim_{\rho=0} Q_\rho(f)(x)$ existir para todo x, e neste caso $\lim_{\rho=0} Q_\rho(f)(x) = f'(x)$

(d) <u>(V)[ ](F)[ ]</u> A **derivada do produto** de duas funções deriváveis. Se f, g forem funções deriváveis então

$$Q_\rho(fg)f(x+\rho)Q_\rho(g) + Q_\rho(f)g(x) \tag{28}$$
$$\lim_{\rho=0} Q_\rho(fg) = f(x)g'(x) + f'(x)g(x) \tag{29}$$

(e) <u>(V)[ ](F)[ ]</u> A **derivada da soma** de duas funções deriváveis. Se f, g forem funções deriváveis então

$$Q_\rho(f+g)Q_\rho(f) + Q_\rho(g) \tag{30}$$
$$\lim_{\rho=0} Q_\rho(f+g) = f' + g' \tag{31}$$

A *derivada da soma* é a *soma das derivadas*.

5. Derivadas de polinômios
   (a) (V)[ ](F)[ ] Se $f(x) = 3x^2 + 5x + 3$ então $f'(x) = 3x + 5$
   (b) (V)[ ](F)[ ] Se $f(x) = 3x^2 + 5x + 3$ então $f'(x) = 6x + 5$
   (c) (V)[ ](F)[ ] Se $f(x) = 7x^3 + 5x^2 + 3x + 7$ então $f'(x) = 7x^2 + 5x + 3$
   (d) (V)[ ](F)[ ] Se $f(x) = 7x^3 + 5x^2 + 3x + 7$ então $f'(x) = 21x^2 + 10x + 3$
   (e) (V)[ ](F)[ ] Se $f(x) = x^5 + x^3 + 3x^2$ então $f'(x) = 5x^4 + 3x^3 + 6x^2$
   (f) (V)[ ](F)[ ] Se $f(x) = x^5 + x^3 + 3x^2$ então $f'(x) = 5x^4 + 3x^2 + 6x$

6. As derivadas de seno e coseno. Vimos, graficamente que $sen(x)' = cos(x)$. Podemos ver, graficamente que $cos'(x) = -sen(x)$. Vamos aceitar como provável e decidir se as contas seguintes são verdadeiras

7. (V)[ ](F)[ ]

$$f(x) = sen^2(x) = sen(x)sen(x) = (sen(x))^2 \tag{32}$$
$$f'(x) = sen'(x)cos(x) + sen(x)cos'(x) = cos^2(x) - sen^2(x) \tag{33}$$
$$f'(x) = cos(2x) \tag{34}$$

8. (V)[ ](F)[ ]

$$g(x) = cos^2(x) = cos(x)cos(x) = (cos(x))^2 \tag{35}$$
$$g'(x) = cos'(x)cos(x) + cos(x)cos'(x) = -2sen(x)cos(x) \tag{36}$$
$$g'(x) = -cos(2x) \tag{37}$$

9. (V)[ ](F)[ ]

$$h(x) = sen^2(x) + cos^2(x) = 1 \ \Rightarrow \ h'(x) = 0 \tag{38}$$
$$h'(x) = 2sen(x)sen'(x) + 2cos(x)cos'(x) = \tag{39}$$
$$h'(x) = 2sen(x)cos(x) - 2cos(x)sen(x)) = 0 \ \Rightarrow \tag{40}$$
$$h'(x) = cos(2x) - cos(2x)0 \tag{41}$$